Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Nouvelle–Calédonie novembre 2010 Correction

Exercice 1 **8 points**

Les parties A et B sont indépendantes

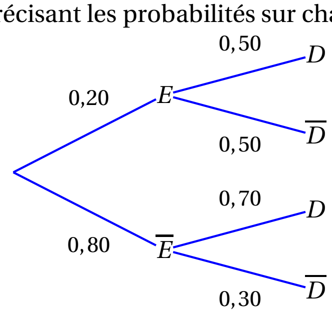
PARTIE A

Dans un restaurant, pendant le service du midi, on a interrogé les clients pour savoir s'ils avaient accompagné leur plat principal d'une entrée et/ou d'un dessert.
On a obtenu les résultats suivants :

- 80 % des personnes interrogées n'ont pas pris d'entrée ;
- Parmi celles-ci, 70 % ont pris un dessert ;
- 50 % des personnes ayant pris une entrée ont également pris un dessert.

On appelle E l'événement : « la personne a pris une entrée »
et D l'événement : « la personne a pris un dessert ».

1. Construisons l'arbre de probabilités, en précisant les probabilités sur chacune des branches.



2. Calculons la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait pris une entrée et un dessert.

$$P(E \cap D) = P(E) \times P_E(D) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1.$$

3. Calculons la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait pris un dessert.

$$P(D) = P(E \cap D) + P(\overline{E} \cap D) = 0{,}1 + 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}66.$$

4. On interroge une personne ayant pris un dessert. Calculons la probabilité qu'elle ait également pris une entrée.

$$P_D(E) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}1}{0{,}66} \approx 0{,}15.$$

5. Les événements E et D sont indépendants si $P(E \cap D) = P(E) \times P(D)$.
$P(E \cap D) = 0{,}1$ et $P(E) \times P(D) = 0{,}2 \times 0{,}66 = 0{,}132$.
Les événements ne sont pas indépendants.

PARTIE B

On admet que 10 % des clients qui mangent dans le restaurant prennent un menu complet : « entrée – plat – dessert ».
On choisit au hasard 20 clients pour les interroger. On admet que ce choix est assimilable à des tirages successifs avec remise. On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de personnes ayant pris un menu complet.

1. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$.
Nous avons donc une loi binomiale de paramètres $(20\,;\,0{,}1)$ par conséquent $p(X = k) = \binom{20}{k}(0{,}1)^k(0{,}9)^{20-k}$.

2. Calculons la probabilité des événements suivants :

a. « Aucun des 20 clients interrogés n'a pris un menu complet » ;

$$p(X=0)=(0{,}9)^{20}\approx 0{,}1216.$$

b. « 5 clients exactement ont pris un menu complet » ;

$$p(X=5)=\binom{20}{5}(0{,}1)^5(0{,}9)^{15}\approx 0{,}0319.$$

c. « Au moins un client a pris un menu complet ». L'événement est réalisé si l'événement contraire ne l'est pas.

$$p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-(0{,}9)^{20}\approx 0{,}8784.$$

Exercice 2 **5 points**

La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée en annexe A est la représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, d'une fonction f dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

1. Par lecture graphique :

a. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$.

b. $f(1)=0$.

2. Par lecture graphique :

a. $f'(1)=-5$. Nous lisons le coefficient directeur de T.

Cette droite passe par les points de coordonnées $(0\,;\,5)$ et $(1\,;\,0)$; $\quad m=\dfrac{0-5}{1-0}$.

b. Une équation de la tangente T est alors $y=-5x+5$.

3. On admet que f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=ax^2\ln x,\ \text{où « a » est un nombre réel.}$$

a. Déterminons f', fonction dérivée de f.

$f'(x)=a(2x)\ln(x)+ax^2\left(\dfrac{1}{x}\right)=2ax\ln(x)+ax.$

b. à la question 2. a., nous avons montré que $f'(1)=-5$.
Calculons $f'(1)$. $f'(1)=2a\times 0+a=a=-5$.
La valeur du nombre réel a est donc -5.

Exercice 3 **7 points**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels, par

$$g(x)=(-2x+1)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphiques :

- 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$. En effet $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x+1}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(-2x+1)=+\infty$.

2. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$. L'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$, à la courbe représentative de g .

3. Démontrons que $g'(x)=(2x-3)\mathrm{e}^{-x+1}$ pour tout x réel.

$$\begin{aligned} g'(x)&=-2\left({}^{-x+1}\right)+(-2x+1)\,(-1)\left(\mathrm{e}^{-x+1}\right);\\ &=-2\mathrm{e}^{-x+1}+\left((2x-1)\mathrm{e}^{-x+1}\right);\\ &=(2x-3)\,\mathrm{e}^{-x+1}.\end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$ par conséquent $g'(x)$ est du signe de $(2x-3)$ sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte que, si $x \in \left]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\right[$ $g'(x) < 0$ et si $x \in \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$ $g'(x) > 0$.

— Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

$g'(x) < 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\right[$ par conséquent g est strictement décroissante sur cet intervalle.

— Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

$g'(x) > 0$ pour $x \in \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$ par conséquent g est strictement croissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$-2^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0

$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(-2 \times \frac{3}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

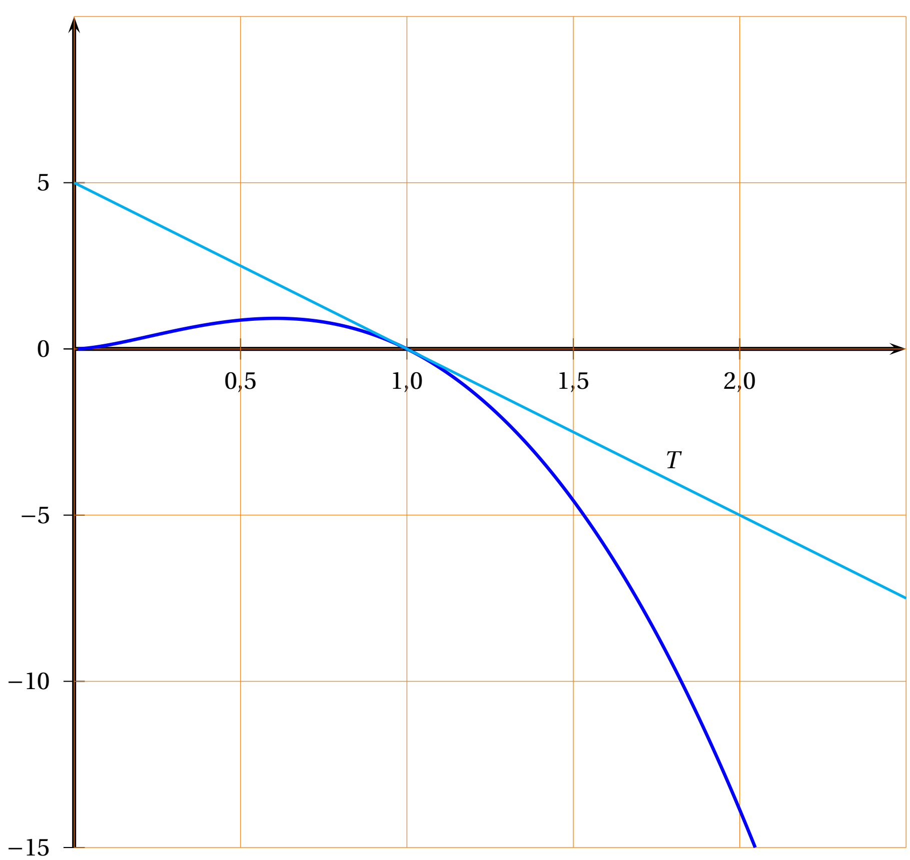
5. Le tableau de valeurs de la fonction g est complété sur l' **annexe A**.

6. Traçons la courbe $\mathscr{C}_g$ et sa tangente au point d'abscisse $\frac{3}{2}$; voir à la fin .

ANNEXE A

Exercice 2

Représentation graphique de f



Exercice 3

x	$-0,7$	$-0,5$	0	1	$1,5$	2	3	4	5	6
$g(x)$	$13,1$	$9,0$	$2,7$	-1	$-1,2$	$-1,1$	$-0,7$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$

Les résultats sont arrondis à 10^{-1} *près.*

La courbe $\mathscr{C}_g$ et sa tangente au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.