Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
novembre 2011 Nouvelle-Calédonie correction

Les annexes A et B sont à rendre avec la copie

Exercice 1 QCM **4 points**

Les réponses au QCM sont données sur l'**annexe A** .
Pour chaque question, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée sera zéro.

Exercice 2 **9 points**

1. Soit g la fonction définie sur $]-1\,;\,5]$ par :

$$g(x) = 3\ln(x+1) - \ln(x+2)$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

a. Déterminons la limite de g en -1.

$$\lim_{x\to -1} g(x) = -\infty$$

En effet, $\displaystyle\lim_{x\to -1} \ln(x+1) = -\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1} \ln(x+2) = 0$.
La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe.

b. Déterminons la fonction g', fonction dérivée de g, pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,5]$.

$$g'(x) = 3\times\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{3(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)}$$

c. Pour tout $x \in]-1\,;\,5]$ $\quad x+1>0$, $\quad 2x+5>0$ et $x+2>0$.
par conséquent $g'(x)$ est positif (strictement) pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,5]$.

d. Dressons le tableau de variations de g sur $]-1\,;\,5]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
$g'(x) > 0$ pour $x \in]-1\,;\,5]$ donc g est strictement croissante sur cet intervalle.

x	-1		5
g'		$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	$3\ln 6 - \ln 7$

$g(5) = 3\ln 6 - \ln 7$.

2. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
$g(0) = -\ln 2 \quad g'(0) = \frac{5}{2}$
Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 est $y = \frac{5}{2}x - \ln 2$.

3. Le tableau de valeurs est complété sur l'annexe B.

4. Traçons la tangente T et la courbe $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormal.

Exercice 3 **7 points**

Une usine fabrique et remplit des bocaux de confiture. Sur un lot de 20 bocaux, on observe 4 bocaux mal fermés.
On prélève au hasard simultanément 3 bocaux dans le lot.

1. Déterminons le nombre de prélèvements possibles.

   Nous choisissons 3 bocaux parmi les 20 . $\binom{20}{3} = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1\,140$

   Il y a 1 140 prélèvements possibles.

   Dans la suite de l'exercice, les résultats des probabilités seront donnés sous forme de fractions.

2. L'univers est l'ensemble des prélèvements possibles et la loi sur cet univers est l'équiprobabilité. Calculons la probabilité des événements :

   a. A : « Aucun bocal n'est mal fermé » ; Nous choisissons 3 bocaux parmi les 16 bien fermés $\binom{16}{3} = 560$

   $p(A) = \dfrac{560}{1\,140} = \dfrac{28}{57}$

   b. B : « Deux bocaux sont mal fermés » ; Nous choisissons 2 bocaux parmi les 4 qui sont mal fermés et 1 parmi les 16 bien fermés. Le nombre de prélèvements favorables est $\binom{3}{2} \times \binom{16}{1} = 96$

   $p(B) = \dfrac{96}{1\,140} = \dfrac{8}{95}$

   c. C : « Au moins deux bocaux sont mal fermés ». ceci correspond à l'évènement B ou à l'événement « les trois bocaux sont mal fermés. » Il y a 4 choix possibles pour prélever 3 bocaux mal fermés. Les événements étant incompatibles, le nombre d'événements favorables à « au moins deux bocaux sont mal fermés » est $96+4 = 100$.

   $p(C) = \dfrac{100}{1\,140} = \dfrac{5}{57}$

3. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de bocaux mal fermés parmi les 3 bocaux prélevés.

   a. La loi de probabilité de la variable X est donnée sur le tableau complété sur l'annexe B.

   b. Calculons $\mathrm{E}(X)$.

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{560}{1\,140} + 1 \times \frac{480}{1\,140} + 2 \times \frac{96}{1\,140} + 3 \times \frac{4}{1\,140} = \frac{3}{5}$$

ANNEXE A

EXERCICE 1 : QCM

Pour chaque question cocher la bonne réponse.

1. Une urne contient 3 jetons rouges et 7 jetons verts indiscernables au toucher. On tire au hasard 3 jetons de cette urne, successivement avec remise. On considère l'événement A « n'obtenir aucun jeton vert ».

   ☐ $p(A) = \dfrac{1}{120}$ ☑ $p(A) = \dfrac{27}{1000}$ ☐ $p(A) = \dfrac{343}{1000}$

   La probabilité de tirer un jeton rouge au premier, au deuxième et troisième essai est à chaque fois $\frac{3}{10}$

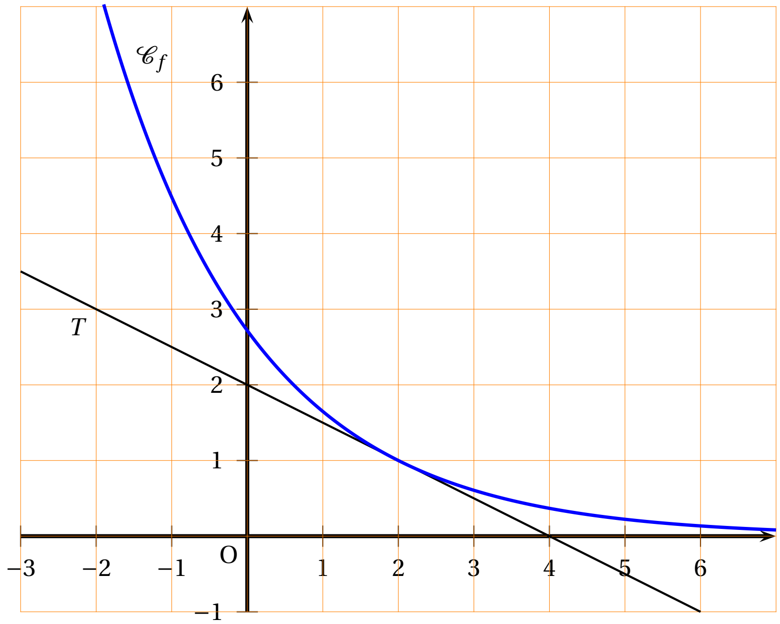
2. Soient A et B deux événements tels que : $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,1$, $p_B(A) = 0,3$.

   ☑ Les événements A et B ne sont pas indépendants. En effet, $p(A) \neq p_B(A)$

   ☐ Les évènements sont incompatibles

   ☐ $p(A \cap B) = 0,04$

3. On considère ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.



Graphiquement on lit que

☑ $f'(2) = -\dfrac{1}{2}$ ☐ $f'(2) = 2$ ☐ $f'(2) = 1$

4. La tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1 a pour équation :

☐ $y = \mathrm{e}^x$ ☐ $y = 3$ ☑ $y = \mathrm{e}x$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $f(1) = \mathrm{e}$ $f'(1) = \mathrm{e}$ $y = \mathrm{e}x - \mathrm{e} + \mathrm{e}$

ANNEXE B

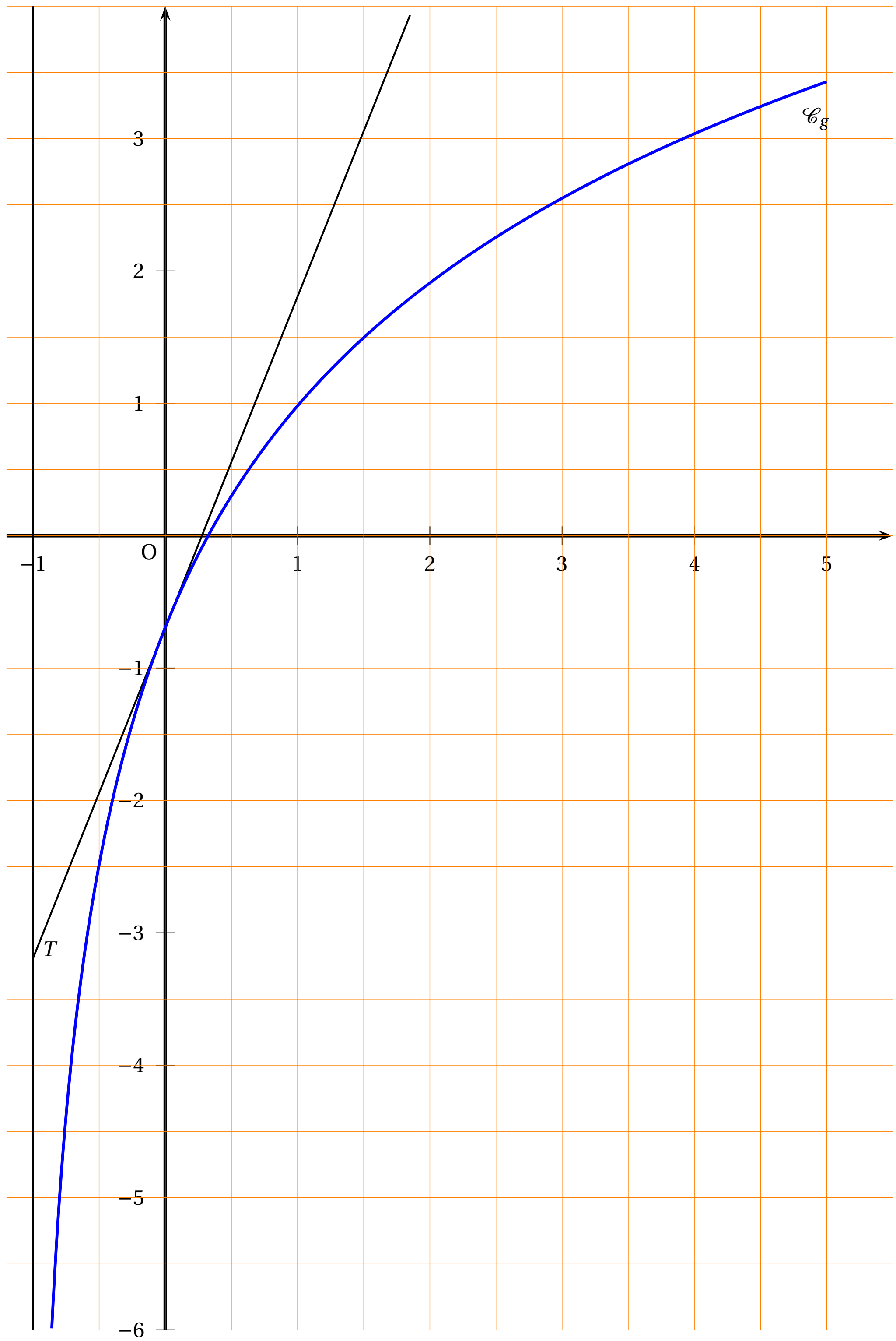
EXERCICE 2

x	$-0,75$	$-0,5$	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	$-4,4$	$-2,5$	$0,7$	$1,0$	$1,9$	$2,5$	$3,0$	$3,4$

Les résultats sont arrondis à 10^{-1} près.

EXERCICE 3

x	0	1	2	3
$p(X = x)$	$\dfrac{560}{1140}$	$\dfrac{480}{1140}$	$\dfrac{96}{1140}$	$\dfrac{4}{1140}$


$\mathscr{C}_g$
T
O
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−1
1
2
3
4
5