Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole, Antilles–Guyane, La Réunion juin 2010 Correction

Exercice 1 **6 points**

Les résultats des probabilités seront donnés sous forme de fractions.

Sur l'étagère d'un magasin, il y a 20 paquets de sucre cristallisé parmi lesquels 4 ont un poids insuffisant. Une cliente, désireuse de faire des confitures, prend au hasard 3 paquets de sucre sur cette étagère.

1. Elle a 1 140 choix possibles. Nous choisissons 3 paquets parmi 20 soit $\dbinom{20}{3} = 1\,140$.

2. Calculons les probabilités des événements suivants :

   A : « Les 3 paquets ont un poids satisfaisant ».
   Elle choisit 3 paquets parmi les 16 qui ont un poids satisfaisant $\binom{16}{3} = 560$. Par conséquent

   $$p(\text{A}) = \frac{560}{1\,140} = \frac{28}{57}$$

   B : « Au moins l'un des 3 paquets a un poids insuffisant ».
   A est l'événement contraire de B par conséquent $p(\text{B}) = 1 - p(\text{A})$

   $$P(\text{B}) = 1 - \frac{28}{57} = \frac{29}{57}$$

3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de paquets ayant un poids satisfaisant parmi les trois paquets achetés.

   a. Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 ou 3.

   b. Déterminons la loi de probabilité de X.

   X=0 les trois paquets ont un poids insuffisant : $\dfrac{\binom{4}{3}}{1\,140} = \dfrac{1}{285}$.

   X=1 1 paquet a un poids satisfaisant et deux, un poids insuffisant : $\dfrac{\binom{16}{1} \times \binom{4}{2}}{1\,140} = \dfrac{8}{95}$.

   X=2 2 paquets ont un poids satisfaisant et un, un poids insuffisant : $\dfrac{\binom{16}{2} \times \binom{4}{1}}{1\,140} = \dfrac{8}{19}$.

   X=3 les trois paquets ont un poids satisfaisant : $\dfrac{28}{57}$.

   c. Calculons l'espérance de X.

   $$\text{E}(X) = 0 \times \frac{1}{285} + 1 \times \frac{8}{95} + 2 \times \frac{8}{19} + 3 \times \frac{28}{57} = \frac{12}{5}$$

Exercice 2 QCM **4 points**

La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée dans le document 1 représente une fonction f dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
La droite D est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
La droite T est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Les courbes 1, 2 et 3 représentent trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Le QCM est donné en **annexe A**. Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

Exercice 3 **10 points**

Soient la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 4x - 1 + \frac{4}{x+2}$$

et $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On prendra pour unités graphiques :

– 3 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
– 1 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Déterminons la limite en -2 de g

$$\lim_{x\to -2} g(x) = \lim_{x\to -2} 4x-1+\lim_{x\to -2}\frac{4}{x+2} = (-9)+(+\infty) = +\infty.$$

Par conséquent, la droite d'équation $x=-2$ est asymptote à la courbe représentative de g.

b. Déterminons la limite en $+\infty$ de g.

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} 4x-1+\lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x+2} = +\infty+0 = +\infty.$$

Nous pouvons remarquer que la droite d'équation $y=4x-1$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. **a.** Déterminons $g'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.

$$g'(x) = 4-4\times\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{4(x+2)^2-4}{(x+2)^2} = \frac{4\left((x+2)^2-1\right)}{(x+2)^2} = \frac{4(x+2+1)(x+2-1)}{(x+2)^2} = \frac{4(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$$

or $(2x+2)(2x+6) = (2(x+1))\,(2(x+3)) = 4(x+1)(x+3)$. Par conséquent $g'(x) = \dfrac{(2x+6)(2x+2)}{(x+2)^2}$.

b. $g'(x)$ est du signe de $(2x+2)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$, car $\dfrac{2(x+3)}{(x+2)^2}>0$ sur cet intervalle.

$2x+2>0$ si et seulement si $x>-1$.

par conséquent si $-2<x<-1$, $\quad g'(x)<0$ et si $x>-1$, $\quad g'(x)>0$.

c. Si pour tout $x\in I$, $f'(x)>0$ alors f est strictement croissante sur I.

$g'(x)>0$ sur $]-1\,;\,+\infty[$ par conséquent g est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x\in I$, $f'(x)<0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

$g'(x)<0$ sur $]-2\,;\,-1[$ par conséquent g est strictement décroissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variations de g sur $]-2\,;\,+\infty[$.

x	-2		-1		$+\infty$
g'		$-$		$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$g(-1) = 4(-1)-1+\dfrac{4}{-1+2} = -5-4 = -1$

3. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

$g(0)=1 \quad g'(0) = 4-\frac{4}{(0+2)^2} = 3$.

Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 est $y=3x+1$.

4. **a.** Le tableau de valeurs est complété sur l'annexe A.

b. La courbe $\mathscr{C}_g$, la tangente T et les asymptotes d'équations $x=-2$ ou $y=4x-1$ sont tracées ci-dessous .

5. Soit H la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $H(x)=\ln(x+2)$.

a. Déterminons $H'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.

$H'(x) = \dfrac{1}{x+2}$ car la fonction dérivée de $\ln\circ u$ est $\dfrac{u'}{u}$

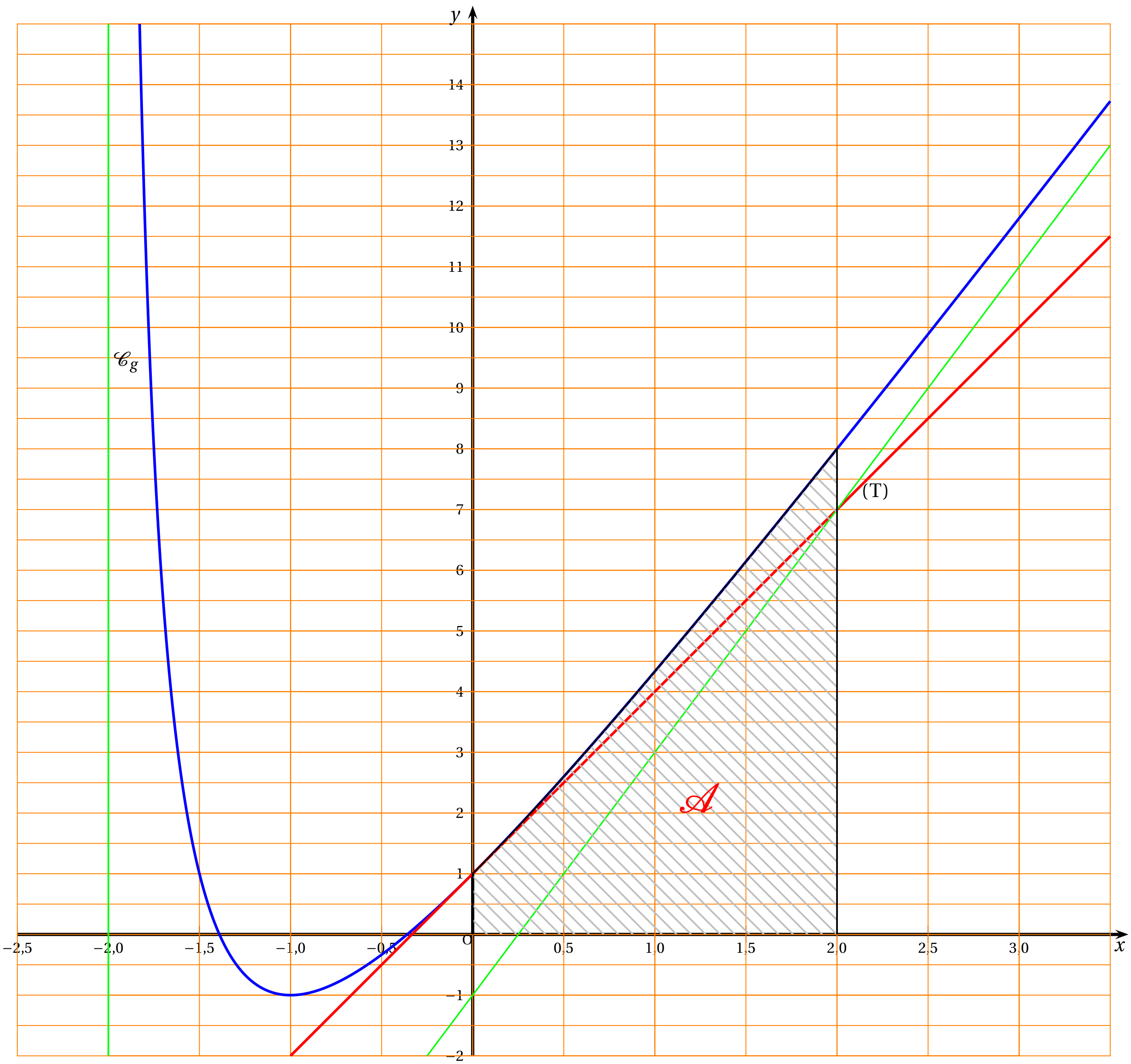
b. Déterminons une primitive G de g sur $]-2\,;\,+\infty[$.

$$G(x) = 2x^2-x+4\ln(x+2)+\mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

c. Calculons la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

$$\mathscr{A} = \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = G(2) - G(0) = 8 - 2 + 4\ln(4) - 4\ln 2 = 6 + 4\ln 2$$

en effet $4\ln 4 - 4\ln 2 = 4(\ln 4 - \ln 2) = 4\left(\ln\left(\frac{4}{2}\right)\right) = 4\ln 2$.
L'unité d'aire a pour valeur $3\ \text{cm}^2$, la valeur de $\mathscr{A}$ est approximativement de $26{,}32\ \text{cm}^2$.



ANNEXE A

Exercice 2 : QCM

Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie sera zéro.*

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.
Cocher, pour chaque question posée, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

1. La limite de la fonction f (représentée dans le **document 1**) en $-\infty$ est :

☐ $-\infty$ ☑ 3 ☐ $+\infty$

2. Une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est :

☑ $y = x+2$ ☐ $y = 2x+1$ ☐ $y = 2x+2$

3. $f'(1)$ est égal à :

☑ 0 ☐ 3 ☐ 1

4. Quelle est, parmi les trois courbes données dans le document 1, celle qui représente la fonction dérivée de f ?

☐ Courbe 1 ☑ Courbe 2 ☐ Courbe 3

La courbe 1 ne convient pas car le point (1 ; 0) n'appartient pas à cette courbe.

La courbe 3 ne convient pas car sur $]-\infty\,;-1[$, la fonction dérivée est positive or f est décroissante sur cet intervalle.

Exercice 3

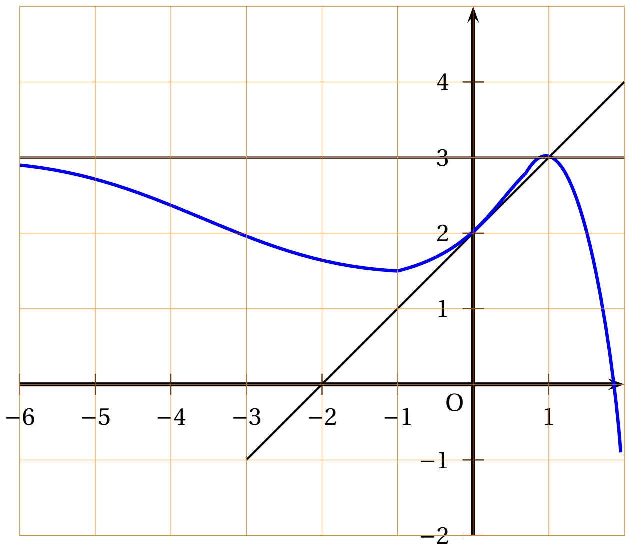
x	$-1,75$	$-1,5$	-1	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$
$g(x)$	8	1	-1	1	2,6	4,3	6,1	8	9,9

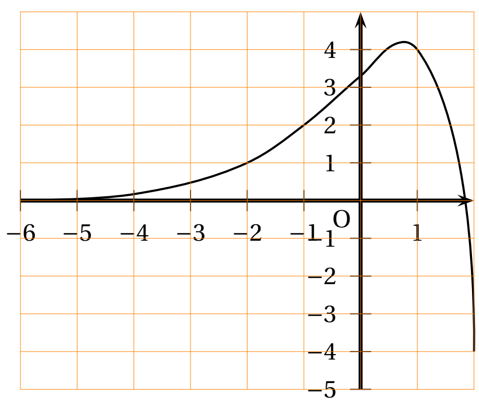
Les valeurs numériques de $g(x)$ *sont arrondies à* 10^{-1} *près.*

DOCUMENT 1

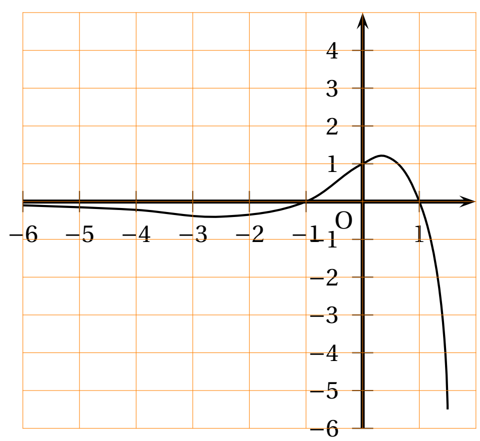
Exercice 2

Représentation graphique de *f*

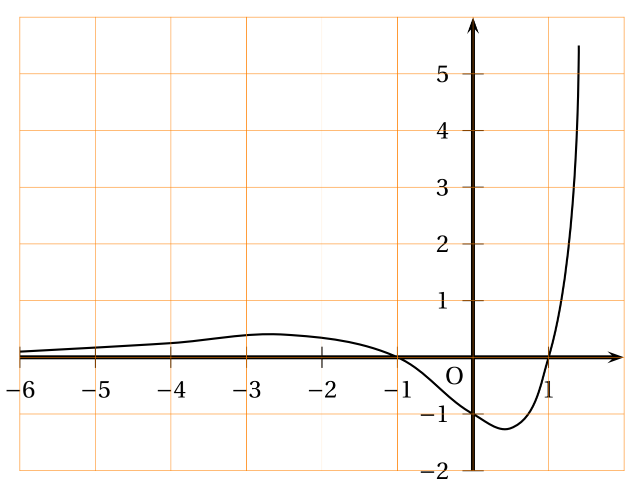




Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3