∽ Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant ∽
Métropole–Antilles–Guyane–Réunion juin 2012 Correction

Exercice 1 **3,5 points**

Une étude statistique a été réalisée sur une population de souris de laboratoire.
Chaque souris de cette population a été observée afin de déceler la présence d'une certaine bactérie dans son organisme. Dans cette population de souris :

- 60 % des souris sont des mâles ;
- parmi les souris mâles, 20 % sont porteuses de la bactérie ;
- 10 % des souris de la population sont des femelles porteuses de la bactérie.

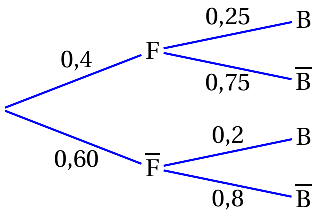
On prélève au hasard une souris de la population et on l'examine afin de déterminer son sexe et de détecter l'éventuelle présence de la bactérie.
On considère les évènements suivants :
F : « la souris prélevée est une femelle » ;
B : « la souris prélevée est porteuse de la bactérie ».

1. **a.** $P(F) = 1 - P\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$.
   10 % des souris de la population sont des femelles porteuses de la bactérie par conséquent $P(F \cap B) = 0,1$.

   b. La probabilité qu'une souris soit porteuse de la bactérie sachant que cette souris est une femelle est définie par $P_F(B)$.

$$P_F(B) = \frac{P(F \cap B)}{P(F)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

2. Construisons l'arbre de probabilités décrivant la situation.



3. Calculons la probabilité de l'évènement B.

$$P(B) = P(F \cap B) + P\left(\overline{F} \cap B\right) = 0,1 + 0,6 \times 0,0.2 = 0,22.$$

   Le résultat obtenu est bien celui attendu.

4. Les évènements B et F sont indépendants si $P(B \cap F) = P(F) \times P(B)$

$$P(B \cap F) = 0,1. \qquad P(F) \times P(B) = 0,4 \times 0,22 = 0,088$$

   Par conséquent, les évènements ne sont indépendants.

5. On prélève dans la population, au hasard et successivement, 5 souris. La population est suffisamment grande pour pouvoir assimiler ces prélèvements à des tirages successifs avec remise.
   On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de souris porteuses de la bactérie parmi les 5 souris prélevées.

   a. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$. Le nombre n de prélèvements est 5 et la probabilité que la souris soit porteuse de la bactérie est 0,22.
   Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (5 ; 0,22) par conséquent $p(X = k) = \binom{5}{k}(0,22)^k(0,78)^{5-k}$

   b. Calculons la probabilité de prélever exactement 3 souris porteuses de la bactérie

$$p(X = 3) = \binom{5}{3} \times (0,22)^3 \times (0,78)^2 \approx 0,0648.$$

   La probabilité de prélever exactement trois souris porteuses de la bactérie est, à 10^{-3}près 0,065.

Exercice 2 **9,5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4~;~0]$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x} + x^2 + 2x + 2.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. $f(0) = 0\mathrm{e}^0 + 0^2 + 2 \times 0 + 0 + 2 = 2.$ $\quad f(-4) = -4\mathrm{e}^{-4} + 16 - 8 + 2 = 10 - 4\mathrm{e}^{-4}.$
2. Calculons la fonction dérivée de f pour tout $x \in [-4~;~0]$. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[-4~;~0]$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + 2x + 2 = \mathrm{e}^x(1+x) + 2(x+1) = (x+1)(\mathrm{e}^x + 2)$$

3. À la question précédente, nous avons montré que $f'(x) = (x+1)\left(\mathrm{e}^x + 2\right)$.
   a. $f'(x)$ est du signe de $x+1$ sur $[-4~;~0]$ car pour tout $x \in [-4~;~0]$ $\quad \mathrm{e}^x + 2 > 0$.
   b. Étudions le signe de $f'(x)$ pour tout x de $[-4~;~0]$. $x+1 > 0 \iff x > -1$,
   par conséquent si $x \in [-4~;~-1[$, $\quad f'(x) < 0$, si $x \in]-1~;~0]$ $\quad f')x > 0$
4. Étudions le sens de variation de f.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
   $f'(x) > 0$ pour $x \in]-1~;~0]$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
   $f'(x) < 0$ pour $x \in [-4~;~-1[$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Dressons le tableau de variation de f sur $[-4~;~0]$.

x	-4		-1		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$10-4\mathrm{e}^{-4}$	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	2

5. Complétons le tableau de valeurs

x	-4	$-3,5$	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0
$f(x)$	9,9	7,1	4,9	3,0	1,7	0,9	0,6	0,9	2

Les valeurs sont arrondies à 10^{-1} près.

6. Traçons $\mathscr{C}_f$.
7. Soit G la fonction définie sur $[-4~;~0]$ par $G(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$.
   Déterminons $G'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[-4~;~0]$. $G'(x) = 1\mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$
   Déterminons une primitive F de f sur $[-4~;~0]$.

$$F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + C$$

8. On admet que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de l'intervalle $[-3~;~-1]$.
   a. Le domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = -1$ est la partie hachurée sur le graphique.
   b. Calculons la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine. Pour tout $x \in [-3~;~-1]$, f étant positive, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = -1$ est, en unités d'aire,

$$\mathscr{A} = \int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-3}^{-1} = F(-1) - F(-3)$$

$$\mathscr{A} = (-1-1)\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 2(-1) - \left((-3-1)\mathrm{e}^{-3} + \frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2 + 2(-3)x\right)$$

$$\mathscr{A} = -2\mathrm{e}^{-1} - \frac{4}{3} - \left(-4\mathrm{e}^{-3} - 6\right)$$

$$\mathscr{A} = \frac{14}{3} + 4\mathrm{e}^{-3} - 2\mathrm{e}^{-1}$$

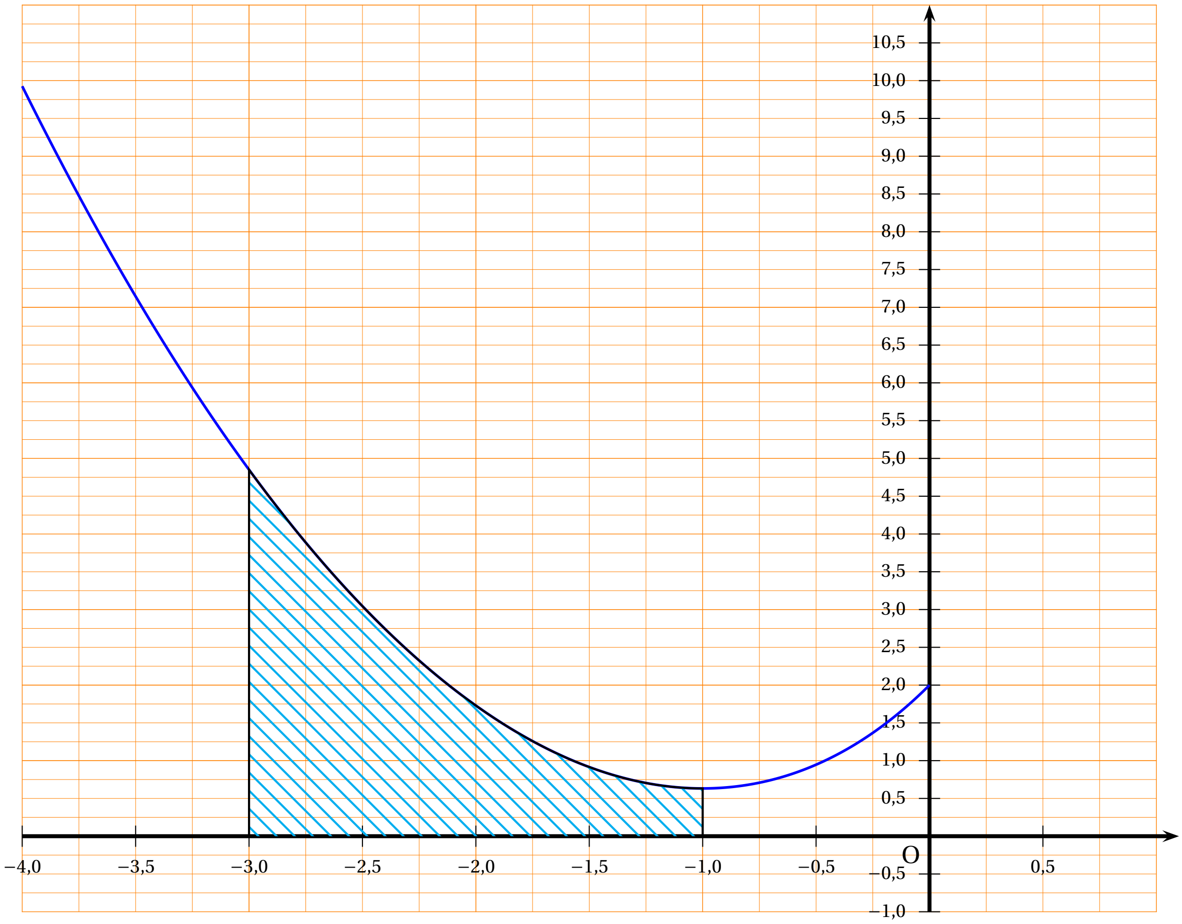


FIGURE 1 – courbe représentative de f

c. L'unité d'aire vaut 3 cm^2. Une valeur arrondie à 10^{-2} près de cette aire est 12,39 cm^2 .

Exercice 3 : QCM **4 points**

La courbe (C) donnée en document 1 est la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. On sait que :

- les points A et B sont les points de la courbe (C) d'abscisses respectives -1 et 0 ;
- la fonction g admet un maximum en $x = -1$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$;
- la droite (T) est tangente à la courbe (C) au point B ;
- la droite (D) est tangente à la courbe (C) au point A.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cet exercice sera zéro.
En cochant la bonne réponse :

1. Limite de g en $+\infty$

☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -3$ ☑ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

La courbe est asymptote à l'axe des abscisses

2. Une équation de la tangente (T) est :

☐ $y = x + 2$ ☐ $y = -x$ ☑ $y = -x + 2$

le coefficient de la tangente doit être négatif et celle-ci doit passer par le point B

3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $g'(x) \geqslant 0$ est :

☑ $]-\infty\,;\,-1]$ ☐ $[-2\,;\,+\infty[$ ☐ $[0\,;\,+\infty[$

g croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ par conséquent $g'(x) \geqslant 0$ sur cet intervalle

4. L'expression de $g(x)$ est :

☐ $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$ ☑ $(x+2)\mathrm{e}^{-x}$ ☐ $(x-2)\mathrm{e}^{-x}$

$x \longmapsto (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ est la seule vérifiant $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $g(0) = 2$

DOCUMENT 1