∽ Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant ∾
Nouvelle–Calédonie novembre 2008 Correction

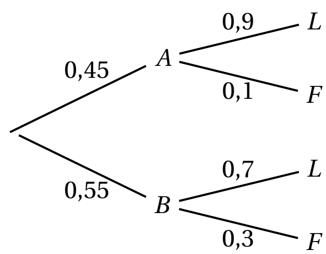
Exercice 1 **7 points**

Deux vaccins sont utilisés pour une même maladie. 45 % des enfants ont été vaccinés avec le vaccin A, les autres avec le vaccin B. On note A, B, L et F les évènements suivants :

A : « recevoir le vaccin A » ;
B : « recevoir le vaccin B » ;
L : « avoir une réaction légère au vaccin » ;
F : « avoir une réaction forte au vaccin ».

30 % des enfants qui ont reçu le vaccin B ont eu une réaction forte.
Tous les enfants ont eu une réaction légère ou forte au vaccin.
Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4} près.

1. La probabilité indiquée 0,1 correspond à : 10 % des enfants qui ont reçu le vaccin A ont eu une réaction forte.
2. L'arbre est complété ci-dessous, avec les probabilités sur les branches.



3. Calculons les probabilités $p(A \cap F)$ et $p(F)$.
$A \cap F$ est l'évènement : « l'enfant a reçu le vaccin A et a eu une réaction forte ».
$p(A \cap F) = p(A) \times p_A(F) = 0,45 \times 0,1 = 0,045$
$p(F) = p(A) \times p_A(F) + p(B) \times p_B(F) = 0,045 + 0,55 \times 0,3 = 0,045 + 0,165 = 0,21$
4. On examine un enfant ayant eu une réaction forte. La probabilité qu'il ait reçu le vaccin A est notée $p_F(A)$.
$p_F(A) = \dfrac{p(A \cap F)}{p(F)} = \dfrac{0,045}{0,21} = 0,2143$.
5. Les évènements A et F sont indépendants si $P(A \cap F) = P(F) \times P(A)$

$$P(A \cap F) = 0,0450. \qquad P(F) \times P(A) = 0,21 \times 0,45 = 0,0945$$

Par conséquent, les évènements ne sont pas indépendants.
6. On examine 10 enfants. On assimilera cet examen à 10 tirages indépendants.
On note X le nombre d'enfants qui ont eu une réaction forte suite à l'un des vaccins.
   a. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$.
   Le nombre n d'examens est 10 et la probabilité que l'enfant ait eu une réaction forte est 0,21.
   Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,21) par conséquent $p(X = k) = \binom{10}{k}(0,21)^k(0,79)^{10-k}$
   b. Calculons la probabilité qu'au moins un des enfants ait eu une réaction forte.
   Pour ce faire, calculons d'abord la probabilité de l'évènement contraire à savoir : « aucun enfant n'a eu une réaction forte ».
   $p(X = 0) = (0,79)^{10} \approx 0,0947$. $\qquad p(X \geqslant 1) = 1 - 0,0947 = 0,9053$.
   La probabilité qu'au moins un enfant a eu une réaction forte est 0,9053.

Exercice 2 **9 points**

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + 2\frac{\ln(x)}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal d'unités graphiques : 1 cm pour une unité en abscisses et 4 cm pour une unité en ordonnées.

1. **a.** Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 + \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln(x)}{x} = 1$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$;

b. Déterminons la limite de f en 0.

$\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = 1 + \lim_{x\to0}\frac{2}{x}\times\ln x = 1 + \lim_{x\to0}\frac{2}{x}\times\lim_{x\to0}\ln x = 1 + \infty\times-\infty = -\infty$;

c. Graphiquement

– lorsque x tend vers $+\infty$, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.

– lorsque x tend vers O, l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f.

2. Déterminons la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$

$$f'(x) = 0 + 2\times\frac{\frac{1}{x}x - 1\ln x}{x^2} = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

3. Résolvons dans $]0\ ;\ +\infty[$, l'équation : $f'(x) = 0$.

$\dfrac{2(1-\ln(x))}{x^2} = 0 \qquad x \neq 0 \quad$ et $\quad 1-\ln(x) = 0 \qquad \ln(x) = 1 \qquad x = \mathrm{e}$

L'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ est $\{\mathrm{e}\}$.

4. **a.** $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$ car pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[\quad \dfrac{2}{x^2} > 0$.

b. Résolvons dans $]0\ ;\ +\infty[$, l'inéquation : $1-\ln(x) > 0$.

$1-\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff 0 < x < \mathrm{e}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $1-\ln(x) > 0$ est $]0\ ;\ \mathrm{e}[$

c. $f(\mathrm{e}) = 1 + 2\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}} = 1 + 2\mathrm{e}^{-1}$.

d. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Pour $x \in]0\ ;\ \mathrm{e}[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Pour $x \in]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Dressons maintenant le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

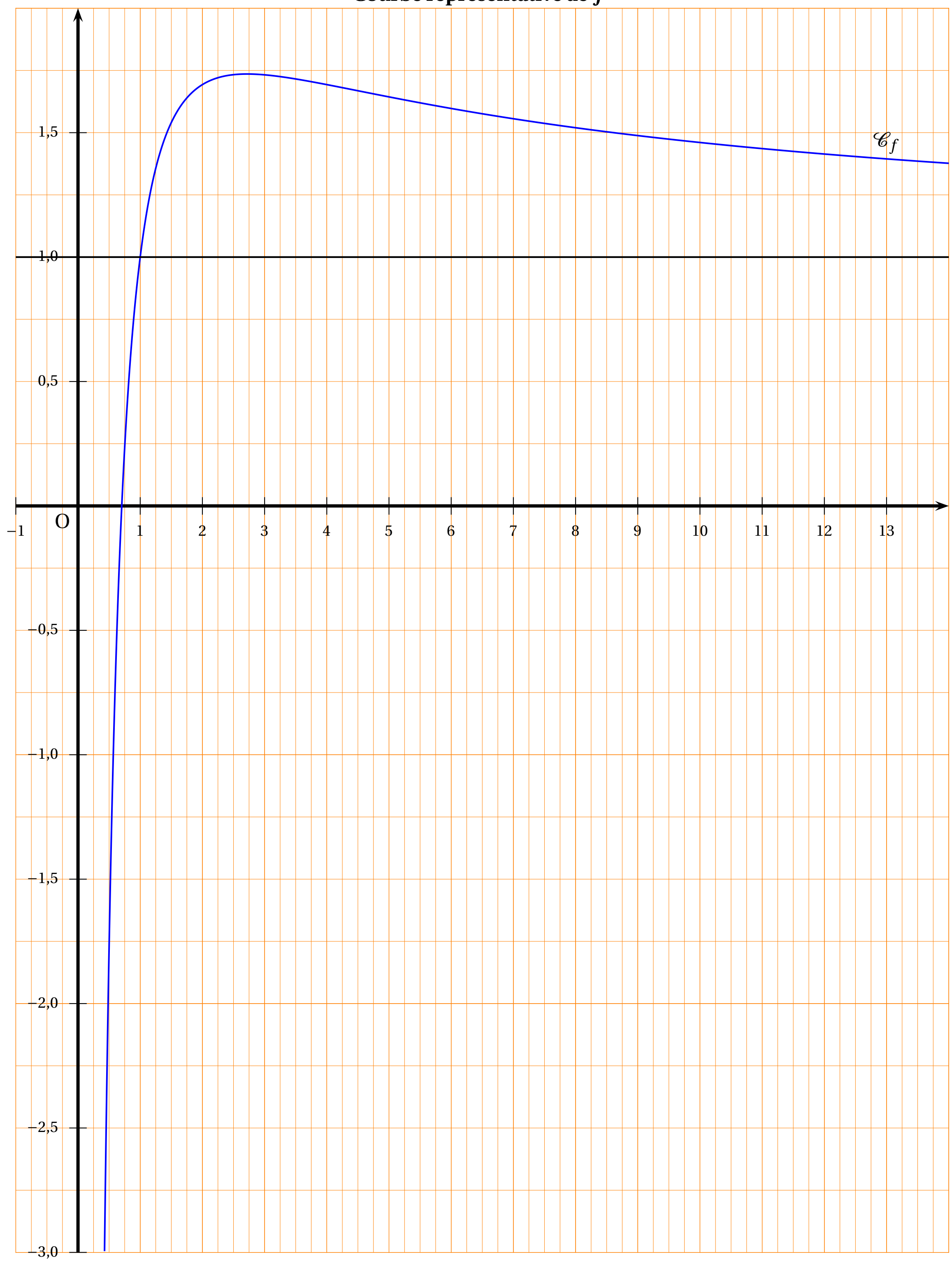
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$1+2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	1

5. Complétons le tableau de valeurs. Les résultats sont arrondis à 10^{-2} près.

x	0,5	1	2	3	5	7	10
$f(x)$	$-1{,}77$	1	1,70	1,73	1,64	1,56	1,46

6. La courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous.

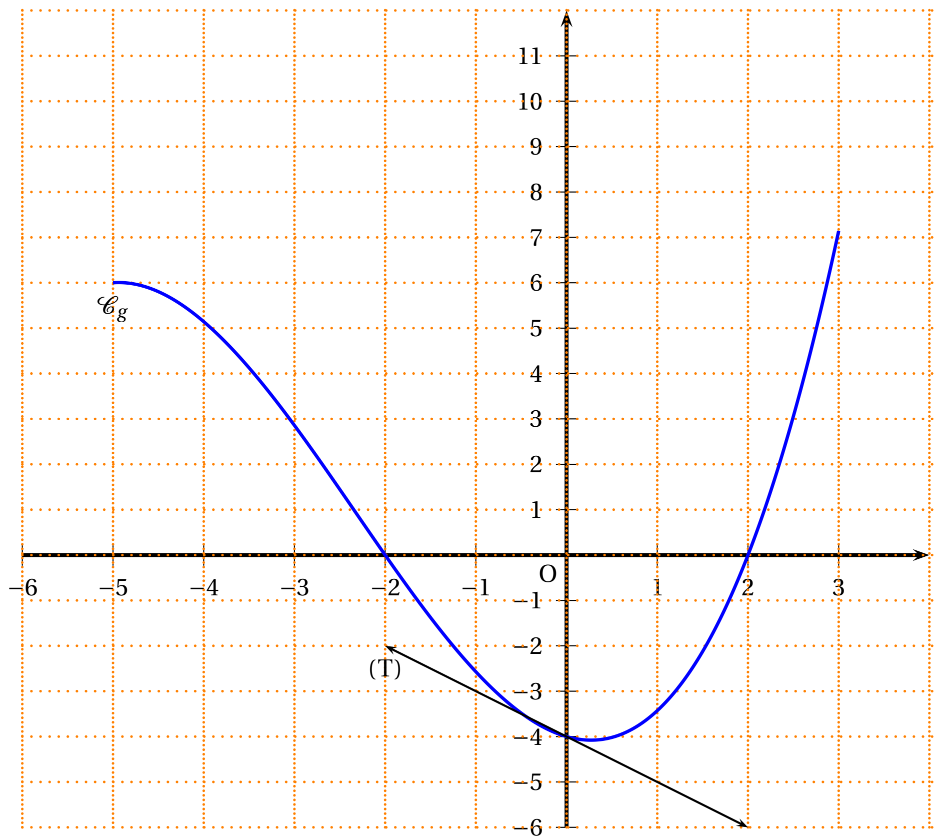
Courbe représentative de f



Exercice 3 **4 points**

La courbe ci-dessous, représente une fonction g définie et dérivable sur $[-5 ; 3]$.
La droite (T) est la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Courbe représentative de g



Par lecture graphique, pour chacune des questions, cocher pour chaque question posée, la (ou les) bonne(s) réponse(s) : Aucune justification n'est demandée.

1. $g(0)$ est égal à :

☑ -4 ☐ -1 ☐ 2 ☐ -2

2. $g'(0)$ est égal à :

☐ -4 ☑ -1 ☐ 2 ☐ -2

3. Dans l'intervalle $[-5 ; 3]$, l'équation $g(x) = 0$ a pour solution(s) :

☐ -4 ☐ -1 ☑ 2 ☑ -2

4. $g(x) > 0$ dans l'intervalle :

☑ [-5 ; -2[☐]- 2 ; 2[☑]2 ; 3] ☐ [2 ; 3]