∽ Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant ∾ juin 2009 Correction

L'annexe est à rendre avec la copie

Exercice 1 **6 points**

Dans tout cet exercice les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} *près.*
Une entreprise fabrique des composants électroniques.
On sait que 95 % des composants ne présentent pas de défaut.
Une machine contrôle ces composants.
- La machine accepte tous les composants sans défaut.
- La machine refuse 80 % des composants présentant un défaut.

Partie A

On dispose d'un lot de 10 000 composants et on choisit au hasard un composant de ce lot. On considère les événements suivants :
- D : « Le composant présente un défaut »
- A : « Le composant est accepté par la machine »

1. Le tableau correspondant aux données est :

	D	$\overline{\text{D}}$	Total
A	100	9 500	9 600
$\overline{\text{A}}$	400	0	400
Total	500	9 500	10 000

2. Calculons les probabilités des événements suivants :
L'univers est l'ensemble des composants électroniques et la loi mise sur cet univers est la loi équirépartie. Pour un événement A : $p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

a. L'événement contraire de D est l'événement « le composant ne présente pas de défaut ». Nous savons que 95 % des composants ne présentent pas de défaut.

$$p(\text{D}) = 1 - p\left(\overline{\text{D}}\right) = 1 - 0,95 = 0,05.$$

b. L'événement $\overline{\text{A}}$ est l'événement « le composant est rejeté par la machine ». Quatre cents composants sont rejetés par la machine.

$$p\left(\overline{\text{A}}\right) = \frac{400}{10000} = 0,04.$$

c. L'événement $\text{D} \cap \text{A}$ est l'événement « le composant a un défaut et est rejeté par la machine ». Cent composants sont dans ce cas.

$$p(\text{D} \cap \text{A}) = \frac{100}{10000} = 0,01.$$

3. Sachant que le composant est accepté, la probabilité qu'il n'ait pas de défaut est définie par $p_{\text{A}}\left(\overline{D}\right)$.

$$p_{\text{A}}\left(\overline{D}\right) = \frac{p\left(\overline{\text{D}} \cap \text{A}\right)}{p\,(\text{A})} = \frac{0,95}{0,96} \approx 0,99$$

Partie B

On admet qu'un composant sans défaut rapporte 4 euros à l'entreprise, un composant refusé par la machine coûte 2 euros et un composant présentant un défaut et accepté par la machine coûte 6 euros à l'entreprise.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque composant, pris au hasard, associe le gain (positif ou négatif) pour l'entreprise.

1. Le tableau de la loi de probabilité de la variable X est

x_i	-6	-2	4
$p(\mathrm{X} = x_i)$	0,01	0,04	0,95

2. Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X notée E(X).

$$E(\mathrm{X}) = -6\times 0{,}01 - 2\times 0{,}04 + 4\times 0{,}95 = 3{,}66$$

Ce nombre représente pour l'entreprise le gain qu'elle peut espérer lors de de la fabrication d'un composant électronique.

Exercice 2 **4 points**

On donne en document la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et (T′) la tangente au point d'abscisse -1.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point.
Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie sera zéro.
Aucune justification n'est demandée.
Par lecture graphique, pour chacune des questions suivantes, la bonne réponse est cochée :

1. ☐ $f(-1) = 0$ ☑ $f(-1) = \mathrm{e}$ ☐ $f(-1) = 3$

Ordonnée du point de la courbe d'abscisse -1.

2. ☐ $f'(-1) = \mathrm{e}$ ☐ $f'(-1) = -1$ ☑ $f'(-1) = 0$

(T') est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Une équation de la droite (T) est :

☐ $y = -2x - 1$ ☑ $y = -x + 2$ ☐ $y = x + 2$

Le coefficient de la droite passant par les points (0 ; 2) et (2 ; 0) est -1.

4. La limite de f en $+\infty$ est égale à :

☐ 1 ☐ $-\infty$ ☑ 0

L'axe des abscisses est asymptote à la courbe.

Exercice 3 **10 points**

Soit g la fonction définie et dérivable sur]0 ; 3] par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

On désigne par $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal d'unités graphiques :
4 cm pour une unité en abscisses ;
1 cm pour une unité en ordonnées.

1. Déterminons la limite de g en 0.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(2x^2+1) - \lim_{x\to 0}\ln x = +\infty.$$

En effet $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2+1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$.
La courbe représentative de g est, par conséquent, asymptote à l'axe des ordonnées lorsque x tend vers 0.

2. **a.** Calculons $g'(x)$ pour tout x de l'intervalle]0 ; 3]. $g'(x) = 2(2x) + 0 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2-1}{x}$.

b. x étant strictement positif, $g'(x)$ est du signe de $4x^2 - 1$ sur]0 ; 3].

c. Étudions le signe de $4x^2 - 1$ sur $]0~;~3]$. Factorisons d'abord $4x^2 - 1$.
$4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$. x étant strictement positif, $2x + 1 > 0$ par conséquent nous sommes amenés à étudier le signe de $2x - 1$.
Dans $\mathbb{R}$, $2x - 1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$.
Par conséquent si $x \in \left]0~;~\frac{1}{2}\right[$, $g'(x) < 0$ ou si $x \in \left]\frac{1}{2}~;~3\right]$, $g'(x) > 0$.

3. a. $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} - (-\ln 2) = \dfrac{3}{2} + \ln 2$.
$g(3) = 2(3)^2 + 1 - \ln 3 = 19 - \ln 3$.

b. Dressons le tableau de variations de g sur $]0~;~3]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I,
pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}~;~3\right]$, $g'(x) > 0$ par conséquent g est croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$ $f'(x) < 0$ alors la fonction f est décroissante sur I,
pour tout $x \in \left]0~;~\frac{1}{2}\right[$, $g'(x) < 0$ par conséquent g est décroisante sur cet intervalle.
d'où le tableau

x	0		$\frac{1}{2}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2 + \frac{3}{2}$	$\nearrow$	$19 - \ln 3$

4. Dressons le tableau de valeurs suivant. Les résultats sont arrondis à 10^{-1} près.

x	0,05	0,125	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$	4,0	3,1	2,5	2,2	3	5,1	8,3	12,6	1,9

5. La courbe $\mathscr{C}_g$ et sa tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ sont tracées sur l'annexe. Comme $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

6. On considère la fonction G définie sur $]0~;~3]$ par :

$$G(x) = \frac{2}{3}x^3 - x\ln x + 2x.$$

G est une primitive de g sur $]0~;~3]$ si $G' = g$.
$G'(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)(3x^2) - \left(1 \times \ln x + x \times \left(\dfrac{1}{x}\right)\right) + 2 = 2x^2 - \ln x + 1 = g(x)$

7. a. Sur le graphique de l'annexe, le domaine plan délimité par $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est hachuré .

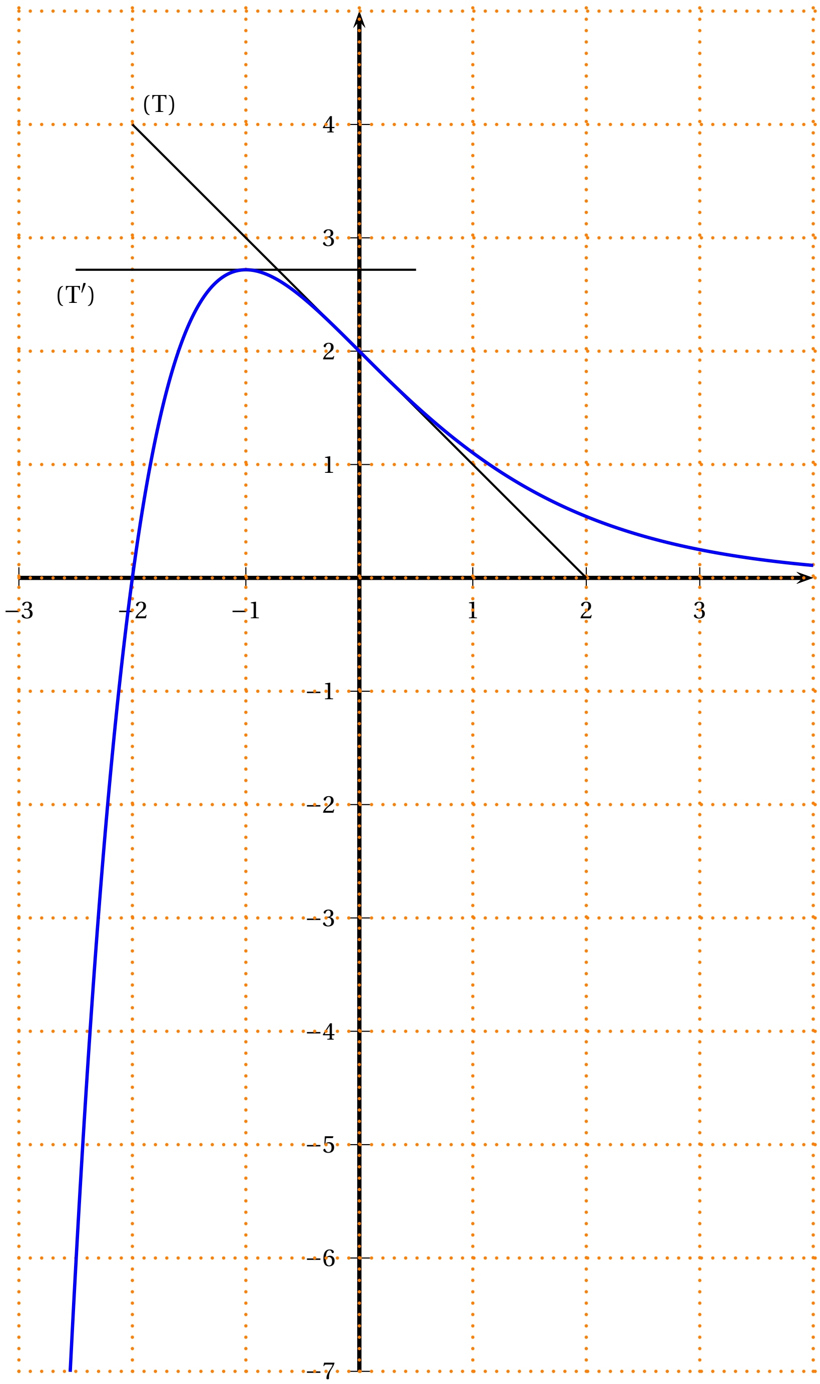
b. En unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan hachuré, g étant strictement positive sur $[1~;~\mathrm{e}]$ est $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[G(x)\Big]_1^{\mathrm{e}} = G(\mathrm{e}) - G(1) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^3 - \mathrm{e} + 2\mathrm{e} - \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3}\mathrm{e}^3 + \mathrm{e} - \frac{8}{3}$$

c. Donnons, en cm^2, la valeur arrondie de cette aire au mm^2 près. L'unité d'aire vaut 4 cm^2.
$\mathscr{A} = 13{,}442\,0 \times 4 \approx 53{,}77$.
L'aire du domaine plan vaut environ 53,77 cm^2.

DOCUMENT exercice 2

Représentation graphique de f et ses tangentes



ANNEXE

Courbe représentative de la fonction g