Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Polynésie juin 2011 Correction

Exercice 1 **6 points**

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-2} *près si nécessaire*

Lors d'une sortie mycologique, des étudiants ont cueilli 50 champignons de différentes espèces.

Partie A

Les champignons ramassés proviennent de 2 forêts :
30 champignons, dont 40 % sont des bolets, proviennent de la forêt F1.
20 champignons, dont 70 % sont des bolets, proviennent de la forêt F2.

1. Le tableau est complété sur l'annexe A.
2. Les champignons sont posés sur une paillasse. On prélève un champignon au hasard sur la paillasse.
   L'univers est l'ensemble des champignons ramassés. La loi est la loi équirépartie donc pour un événement A $p(\text{A}) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$.
   Déterminons la probabilité des événements suivants :
   – A : « le champignon a été prélevé dans la forêt F1 » ; Il y a 30 champignons venant de la forêt F1. $p(\text{A}) = \dfrac{30}{50} = 0,6$.
   – B : « le champignon est un bolet ». Il y a 26 bolets donc $p(\text{B}) = \dfrac{26}{50} = 0,52$.
3. Sachant que le champignon est un bolet, la probabilité qu'il provienne de la forêt F1 est
   $p_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{B})} = \frac{12}{26} \approx 0,46$

Partie B

Un des paniers contient 25 champignons.
Parmi ces champignons, 15 sont comestibles et 10 sont vénéneux. Parmi les 10 champignons vénéneux, 3 sont mortels.
On tire au hasard et simultanément 6 champignons dans le panier.
L'univers est l'ensemble des tirages possibles et la loi est la loi équirépartie

1. Déterminons le nombre de tirages possibles de ces 6 champignons.
   Nous choisissons 6 champignons parmi les 25, il y en a $\dbinom{25}{6}$ soit 177 100.
2. Calculons la probabilité que les 6 champignons soient comestibles.
   Nous choisissons 6 champignons parmi les 15 comestibles, il y en a $\dbinom{15}{6}$ soit 5 005.
   Par conséquent $p(\{\text{« les 6 sont comestibles »}\}) = \dfrac{5\,005}{177\,100} \approx 0,03$.
3. Calculons la probabilité d'avoir exactement 4 champignons comestibles.
   Nous choisissons 4 champignons parmi les 15 comestibles et 2 parmi les 10 vénéneux,
   il y en a $\dbinom{15}{4} \times \dbinom{10}{2}$ soit 61 425.
   Par conséquent $p(\{\text{« exactement 4 sont comestibles »}\}) = \dfrac{61\,425}{177\,100} \approx 0,35$.
4. Calculons la probabilité d'avoir au moins un champignon mortel.
   Calculons d'abord la probabilité de n'avoir aucun champignon mortel.
   Nous choisissons 6 champignons parmi les 22 qui ne sont pas mortels il y en a $\dbinom{22}{6}$ soit 74 613.
   Par conséquent $p(\{\text{« au moins 1 est mortel »}\}) = 1 - \dfrac{74\,613}{177100} \approx 0,58$.

Exercice 2 **4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, disons si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant notre réponse.

1. **Affirmation 1 :** **FAUSSE**

   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - x$.
   La tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 0.
   Pour ce faire, nous devrions avoir $g'(0) = 0$ or

   $$g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 1 \qquad g'(0) = 2 - 1 = 1$$

2. **Affirmation 2 :** **VRAIE**

   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - x$.
   On a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

   $$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} + \lim_{x \to -\infty} -x = 0 + (+\infty)$$

3. **Affirmation 3 :** **VRAIE**

   Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètre $n = 15$ et $p = 0,7$.
   On a $p(X = 8) \approx 0,081\,1$.

   $$p(X = 8) = \binom{15}{8} \times (0,8)^8 \times (0,3)^7 \approx 0,081\,13$$

4. **Affirmation 4 :** **VRAIE**

   Soit Y une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

   L'espérance mathématique de Y est égale à $\dfrac{19}{12}$

   $$\mathrm{E}(Y) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{4+6+9}{12} = \frac{19}{12}$$

Exercice 3 **10 points**

Partie A

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormal.
La tangente T à $\mathscr{C}_f$, au point A de coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ a pour coefficient directeur -3.

1. Puisque A$\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad f(1) = \frac{1}{2}$ et que la tangente a pour coefficient directeur -3 $\quad f'(1) = -3$.

   f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx - 4\ln x$ oˇ a et b sont deux réels.
   Déterminons $f'(x)$ en fonction de a et b. $f'(x) = a(2x) + b - 4(\frac{1}{x}) = 2ax + b - \frac{4}{x}$

   a et b sont solutions du système $\begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2} \\ f'(1) = -3 \end{cases}$ en remplaçant par leur valeur $\begin{cases} a + b = \dfrac{1}{2} \\ 2a + b = 1 \end{cases}$

   Résolvons ce système, en soustrayant nous obtenons $a = \frac{1}{2}$ et par suite en remplaçant dans la première ligne $b = 0$

   L'ensemble des solutions du système est $\left\{(\frac{1}{2}\,;\,0)\right\}$

Partie B

On admet que f est définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\ln x.$$

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. En effet, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} -\ln x = -(-\infty) = +\infty$
   L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe quand x tend vers 0.
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\ln x$. En mettant x en facteur, nous obtenons bien $f(x) = x\left(\frac{1}{2}x - 4\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right)$.
   $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. En effet, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ d'o˘ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2}x - 4\times\left(\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ et $(+\infty)\times(+\infty) = +\infty$
3. Déterminons $f'(x)$ pour tout x de $]0~;~+\infty[$. $f'(x) = x - 4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2-4}{x^2}$
4. …tudions le signe de $\left(x^2-4\right)$ sur $\mathbb{R}$. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $x \in]0~;~2[$, $f'(x) < 0$ et si $x \in]2~;~+\infty[$, $f'(x) > 0$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Pour tout $x \in]0~;~2[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Pour tout $x \in]0~;~2[$, $f'(x) < 0$, par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Dressons alors le tableau de variations de la fonction f.

x	1		2		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$2-4\ln 2$	↗	$+\infty$

5. Le tableau de valeurs est complété sur l'annexe A.
6. Dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, traçons la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2, la tangente T et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'annexe.

ANNEXE

Exercice 1

	F1	F2	Total
Bolet	12	14	26
Autre	18	6	24
Total	30	20	50

Exercice 3

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	5,6	2,9	0,5	−0,5	−0,8	−0,5	0,1	1,1	2,5	4,1	6,1

les résultats sont arrondis à 10^{-1} près.