Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Polynésie juin 2012 Correction

Exercice 1 **7 points**

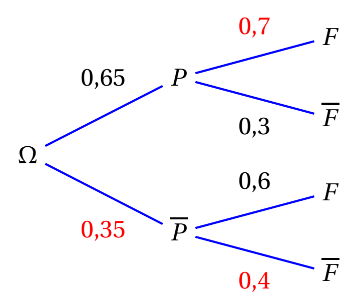
Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près si nécessaire.*

Un pépiniériste utilise des arbustes pour composer des haies. Ces arbustes peuvent être à feuillage persistant ou non. Ils peuvent aussi être à fleurs ou non.
Le pépiniériste choisit un arbuste au hasard.
On note :
P l'évènement « l'arbuste est à feuillage persistant »,
F l'évènement « l'arbuste est à fleurs ».
La situation est partiellement décrite par l'arbre de probabilités.

1. On considère les probabilités données sur l'arbre. On a : $0,65 = p(P)$.
   Les autres probabilités données sur cet arbre sont
   – L'arbuste n'est pas à fleurs sachant qu'il est à feuillage persistant : $0,3 = p_P(\overline{F})$
   – L'arbuste est à fleurs sachant qu'il est à feuillage non persistant : $0,6 = p_{\overline{P}}(F)$
2. L'arbre de probabilités traduisant la situation est



3. Calculons la probabilité de choisir un arbuste à feuillage persistant et à fleurs. L'évènement est noté $P \cap F$.

$$p(P \cap F) = 0,65 \times 0,7 = 0,455$$

4. Calculons la probabilité de choisir un arbuste à fleurs.

$$p(F) = p(P \cap F) + p(\overline{P} \cap F) = 0,455 + 0,35 \times 0,6 = 0,455 + 0,21 = 0,665$$

5. Le pépiniériste a choisi un arbuste à fleurs. La probabilité que cet arbuste soit à feuillage persistant est $p_F(P)$.

$$p_F(P) = \frac{p(P \cap F)}{p(F)} = \frac{0,455}{0,665} \approx 0,684$$

Partie B

Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
Pour planter une haie, le pépiniériste choisit au hasard et simultanément 4 arbustes dans un lot de 16 dont 6 sont à fleurs.
L'univers Ω est l'ensemble des choix possibles pour planter la haie. La loi de probabilité mise sur l'univers est la loi équi-répartie. La probabilité d'un évènement A est $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$

1. Calculons le nombre de choix possibles de ces 4 arbustes.
   Nous choisissons 4 arbustes parmi 16 soit $\binom{16}{4}$. Il y a 1 820 choix possibles.

On note C l'évènement « la haie comporte 3 arbustes à fleurs » et D l'évènement « la haie comporte au moins un arbuste à fleurs ».

2. Calculons la probabilité que la haie comporte 3 arbustes à fleurs.
Nous choisissons 3 arbustes à fleurs parmi les 6 et nous complétons par un arbuste parmi les 10 qui ne sont pas à fleurs. $\binom{6}{3} \times \binom{10}{1} = 200$. Il y a donc 200 choix possibles.

$$p(C) = \frac{200}{1\,820} = \frac{10}{91}$$

3. Calculons la probabilité que la haie comporte au moins un arbuste à fleurs.
Calculons d'abord la probabilité de l'évènement contraire « La haie ne comporte aucun arbuste à fleurs ». Nous choisissons donc 4 arbustes parmi les 10 qui ne sont pas à fleurs. $\binom{10}{4} = 210$. Il y a 210 choix possibles. Par conséquent,

$$p\left(\overline{D}\right) = \frac{210}{1\,820} = \frac{3}{26} \text{ et } p(D) = 1 - p\left(\overline{D}\right) = 1 - \frac{3}{26} = \frac{23}{26}.$$

Exercice 2 **4 points**

Soient f une fonction définie sur $[-2~;~4]$ et f' sa fonction dérivée.
La courbe représentative de la fonction dérivée f', notée $\mathscr{C}_{f'}$. est donnée dans le document 1. On notera $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f.

1. D'après la représentation graphique de f', le tableau de signe de $f'(x)$ est

x	-2		-1		2		3		4
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Étudions les variations de f sur l'intervalle $[-2~;~4]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
$f'(x) > 0$ pour $x \in]-1~;~2[$ ou pour $x \in]3~;~4]$ donc f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
$f'(x) < 0$ pour $x \in [-2~;~-1[$ ou pour $x \in]2~;~3[$ donc f est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.

x	-2		-1		2		3		4
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3. QCM
Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette question sera zéro.

a. Par lecture graphique, on obtient :

☑ $f'(1) = 4$ ☐ $f'(1) = -3$ ☐ $f'(1) = 6$

b. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$ est :

☐ $y = -3x + 8$ ☐ $y = 8x + 3$ ☑ $y = 4x + 12$

Le nombre dérivé d'une fonction f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$ est 4. (question précédente)

Exercice 3 **9 points**

Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \frac{2}{x} - \mathrm{e}^{-x}.$$

Sa courbe représentative dans un repère orthogonal, notée $\mathscr{C}_g$, est donnée dans le document 1.

1. • Déterminons la limite de g en 0. $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$
   car $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{x}\right) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} -\mathrm{e}^{-x} = -1$.
   Nous en déduisons que $\mathscr{C}_g$ est asymptote à l'axe des ordonnées lorsque x tend vers 0.
   • en $+\infty$. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} g(x) = 1$
   car $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} -\mathrm{e}^{-x} = 0$
   Par conséquent $\mathscr{C}_g$ est asymptote à la droite d'équation $y = 1$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Calculons $g'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

$$g'(x) = 0 - 2\times\left(\frac{-1}{x^2}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \frac{2}{x^2} + \mathrm{e}^{-x}$$

3. $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ comme somme et quotient de termes strictement positifs.
   Dressons le tableau de variations de g.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
   $g'(x) > 0$ pour $x \in]0~;~+\infty[$ par conséquent g est strictement croissante sur cet intervalle.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	1

4. $g(1) = 1 - 2 - \mathrm{e}^{-1} = -1 - \mathrm{e}^{-1}$ et $g'(1) = 2 + \mathrm{e}^{-1}$.
5. Déterminons une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
   L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 est $y = \left(2+\mathrm{e}^{-1}\right)(x-1) - 1 - \mathrm{e}^{-1}$, soit $y = \left(2+\mathrm{e}^{-1}\right)x - 3 - 2\mathrm{e}^{-1}$.
6. Déterminons graphiquement le signe de $g(x)$ sur $[3~;~+\infty[$.
   Pour $x \in [3~;~+\infty[$, $\mathscr{C}_g$ est située dans le demi-plan des y strictement positifs, par conséquent $g(x) > 0$.
7. Calculons $G(x)$ où G désigne une primitive de g sur $]0~;~+\infty[$.
   Sur $\mathbb{R}_*^+$ une primitive de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto x$, celle de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln x$ $(x > 0)$ et de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$, d'où

$$G(x) = x - 2\ln x + \mathrm{e}^{-x}$$

8. L'aire $\mathscr{A}$ (exprimée en unité d'aire) du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$ est, g étant strictement positive sur $[3\,;\,5]$, $\displaystyle\int_3^5 g(x)\,\mathrm{d}x$.

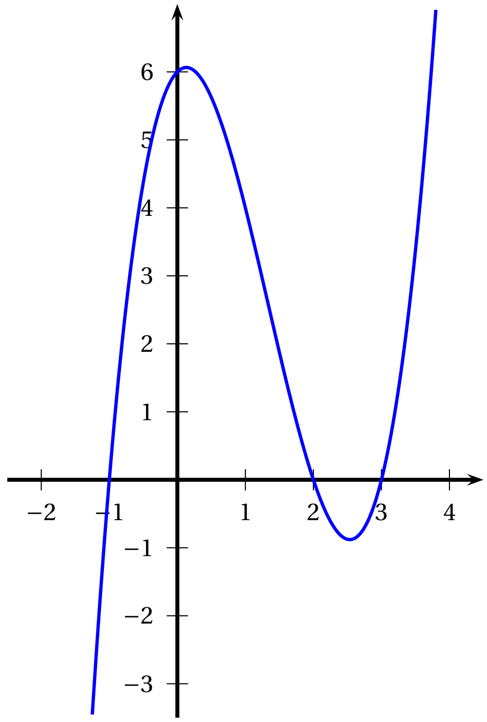
$$\int_3^5 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[G(x)\right]_3^5 = G(5) - G(3) = 5 - 2\ln 5 + \mathrm{e}^{-5} - \left(3 - 2\ln 3 + \mathrm{e}^{-3}\right) = 2 + 2(\ln 3 - \ln 5) + \mathrm{e}^{-5} - \mathrm{e}^{-3}$$

   $\mathscr{A}$ vaut $2 + 2(\ln 3 - \ln 5) + \mathrm{e}^{-5} - \mathrm{e}^{-3}$ unité d'aire ou à 10^{-2} près 0,94 unité d'aire.

DOCUMENT 1

Exercice 2

Représentation graphique de la fonction f'



Exercice 3

Représentation graphique de la fonction g