∽ Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant ∾
Polynésie juin 2013 Correction

La calculatrice est autorisée.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, qu'il aura développée.

Exercice 1 **9 points**

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,3]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x-1} - x + 3.$$

1. Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x-1} + \lim_{x\to-\infty}(-x+3) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

2. Déterminons $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty\,;\,3]$.

$$f'(x) = 1(\mathrm{e}^{x-1}) - 1 + 0 = \mathrm{e}^{x-1} - 1$$

3. **a.** Résolvons dans $]-\infty\,;\,3]$ l'inéquation : $\mathrm{e}^{x-1} - 1 \geqslant 0$.
$\mathrm{e}^{x-1} - 1 \geqslant 0 \qquad \mathrm{e}^{x-1} \geqslant 1 \qquad x-1 \geqslant \ln 1 \qquad x-1 \geqslant 0 \qquad x \geqslant 1.$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[1\,;\,3]$

b. Il en résulte que si $x \in]-\infty\,;\,1[$, $f'(x) < 0$ et si $x \in]1\,;\,3]$, $f'(x) > 0$

4. **a.** Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Pour $x \in]-\infty\,;1]$, $f'(x) < 0$, par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Pour $x \in]1\,;\,3]$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variation de f sur $]-\infty\,;\,3]$.

x	$-\infty$		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	3	↗	e^2

b. f admet un minimum égal à 3 pour $x = 1$ par conséquent pour tout $x \in\ ]-\infty\,;\,3]$ $f(x) \geqslant 3$, *a fortiori* $f(x)$ est strictement positif sur $]-\infty\,;\,3]$.

5. **a.** Le tableau de valeurs est complété sur l' **annexe A (à rendre avec la copie)**.

b. La courbe représentative de f est construite page 5 dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

6. **a.** Déterminons une primitive F de f sur $]-\infty\,;\,3]$.

$$F(x) = \mathrm{e}^{x-1} - \frac{x^2}{2} + 3x.$$

b. Calculons $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ puis donnons la valeur arrondie à 10^{-2} près.

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = \mathrm{e}^0 - \frac{1}{2} + 3 - \left(\mathrm{e}^{-1} - 0 + 0\right) = \frac{7}{2} - \mathrm{e}^{-1} \approx 3{,}13.$$

Graphiquement f étant strictement positif sur $[0\,;\,1]$, cette valeur est en unités d'aire, l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. L'unité d'aire valant 4 cm^2, l'aire de ce domaine est d'environ 12,52 cm^2.

Exercice 2 — 7 points

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies à 0,001 près si nécessaire.

Une des épreuves du concours d'entrée aux ENSA (Écoles Nationales Supérieures d'Agronomie) est un oral de biologie.
Lors de cette épreuve, les candidats doivent répondre soit à une question de biologie animale, soit à une question de biologie végétale. Les résultats de la dernière promotion montrent que :

- 45 % des questions ont porté sur la biologie animale ;
- parmi les candidats interrogés sur la biologie animale, 60 % ont été reçus au concours ;
- parmi les candidats interrogés sur la biologie végétale, 70 % ont été reçus au concours.

On interroge au hasard un candidat de cette promotion.

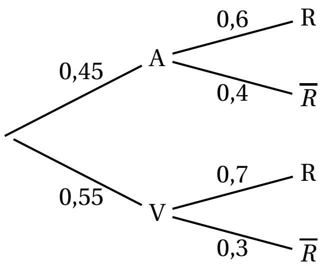
On note A, V et R les événements suivants :

A : « le candidat est interrogé sur la biologie animale » ;

V : « le candidat est interrogé sur la biologie végétale » ;

R : « le candidat est reçu au concours ».

1. Construisons un arbre de probabilités décrivant cette situation en précisant les valeurs des probabilités sur chaque branche.



2. Montrons que $p(\text{R}) = 0,655$.

$p(\text{R}) = p(\text{A})p_{\text{A}}(\text{R}) + p(\text{V})p_{\text{V}}(\text{R}) = 0,45 \times 0,6 + 0,55 \times 0,7 = 0,27 + 0,385 = 0,655$

3. Le candidat est reçu au concours. la probabilité pour qu'il ait été interrogé sur la biologie animale est notée $p_{\text{R}}(\text{A})$.

$p_{\text{R}}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{R})}{p(\text{R})} = \dfrac{0,27}{0,655} \approx 0,412$

4. Les événements A et R sont indépendants si $p(\text{A} \cap \text{R}) = p(\text{A}) \times p(\text{R})$.

$p(\text{A} \cap \text{R}) = 0,27 \quad p(\text{A}) \times p(\text{R}) = 0,45 \times 0,655 \approx 0,294$

Les événements A et R ne sont pas indépendants .

5. On interroge au hasard et de façon indépendante 6 candidats de cette promotion.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats reçus à ce concours parmi les 6.

a. La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,655$. En effet, La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de 6 séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues (réussite ou échec) de probabilité $p = 0,655$ et $q = 0,345$ telles que $p + q = 1$.

Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (6 ; 0,655)

par conséquent $p(X = k) = \binom{6}{k}(0,655)^k(0,345)^{6-k}$

b. Calculons la probabilité que les 6 candidats soient reçus au concours c'est-à-dire $p(\text{X} = 6)$.

$p(\text{X} = 6) = (0.655)^6 \approx 0,079$

c. Calculons la probabilité qu'au moins 2 candidats soient reçus au concours c'est-à-dire $p(2 \leqslant \text{X} \leqslant 6)$.

$p(2 \leqslant \text{X} \leqslant 6) = 1 - \big(p(\text{X} = 0) + p(\text{X} = 1)\big) = 1 - (0,002 + 0,019) = 0,979$

Exercice 3 — 4 points

La courbe C, donnée dans le **document 1**, est la représentation graphique dans un repère orthogonal, d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse -3.

La droite Δ est tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

La droite D est asymptote à C en $+\infty$.

Par lecture graphique, compléter le QCM donné en **annexe A**.

Pour chaque question, une et une seule des trois réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte 1 point.

Une réponse inexacte enlève 0,5 point.

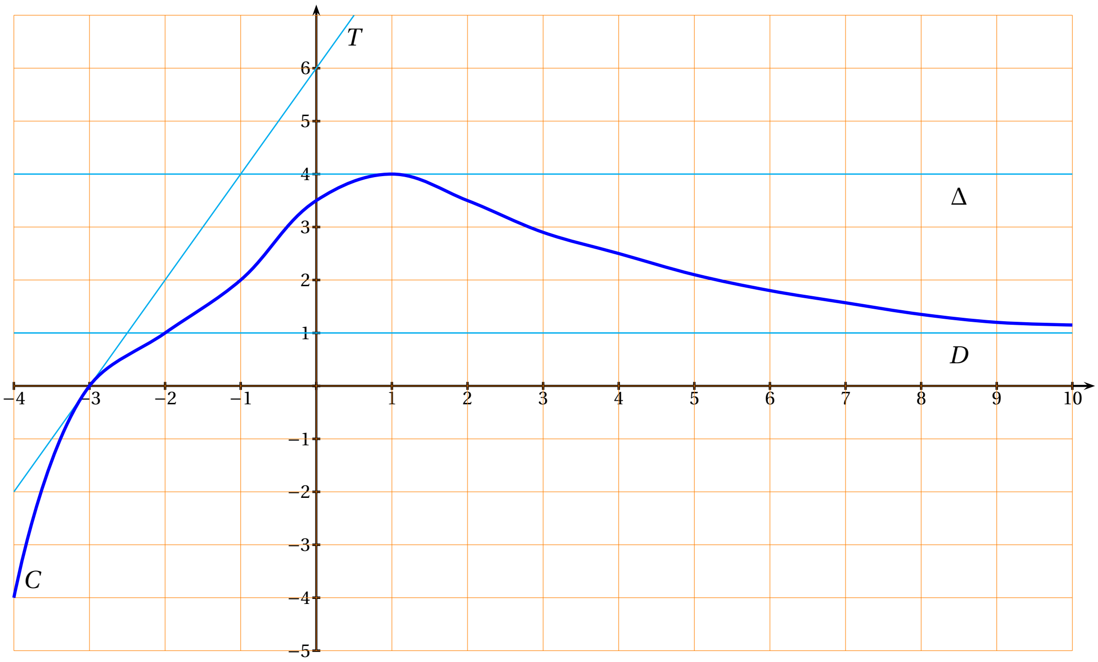
L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point.

Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice sera 0. Aucune justification n'est demandée.

Document 1

EXERCICE 3

Représentation graphique de la fonction g



ANNEXE A(à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 1

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8,0	7,0	6,0	5,0	4,1	3,4	3	3,7	7,4

Les valeurs sont arrondies à 10^{-1} *près.*

EXERCICE 3 : QCM

Pour chaque question posée, la réponse qui convient,a été cochée.

1. L'image de -1 par g est :

☐ 4 ☐ 1 ☑2

2. Le nombre dérivé de g en -3 est :

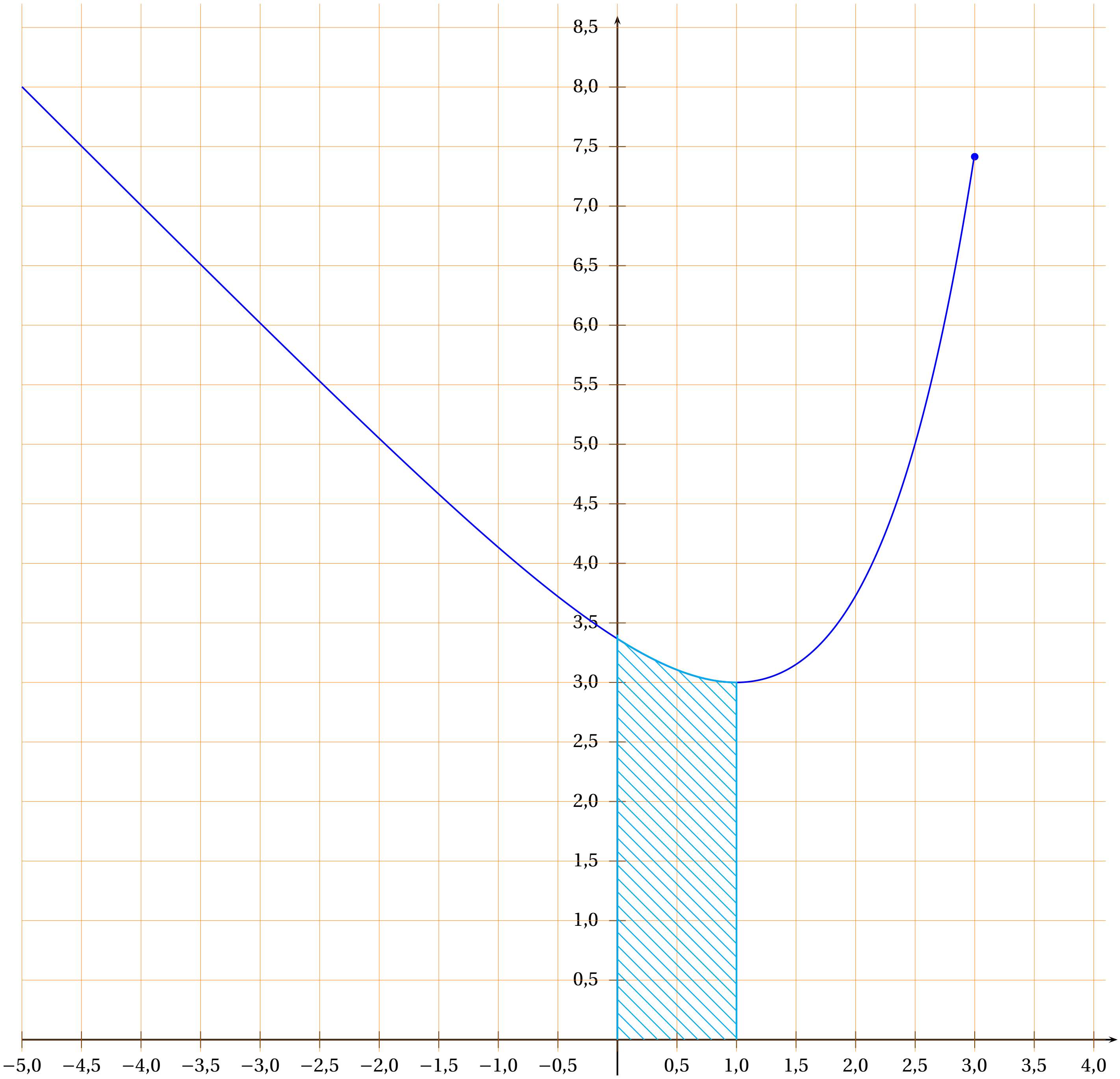
☑2 ☐ 6 ☐ 0

3. La fonction g est strictement positive sur l'intervalle :

☐ $]-\infty\ ;\ 1]$ ☐ $]-4\ ;\ 1]$ ☑ $]-3\ ;\ +\infty[$

4. La limite de la fonction g en $+\infty$ est égale à :

☐ 0 ☐ $+\infty$ ☑ 1


8,5
8,0
7,5
7,0
6,5
6,0
5,5
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
−5,0
−4,5
−4,0
−3,5
−3,0
−2,5
−2,0
−1,5
−1,0
−0,5
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0