Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Antilles-Guyane-Polynésie septembre 2020

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **7 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

On donnera les résultats arrondis si nécessaire à 10^{-3} près.

PARTIE 1

L'équipe « recherche et développement » d'une entreprise souhaite créer un nouveau modèle de paire de lunettes de réalité augmentée.
On lance une fabrication test pour laquelle on estime que 5 % des paires de lunettes présentent un défaut. On prélève alors au hasard 12 paires de lunettes.
On suppose que la fabrication est suffisamment importante pour considérer indépendant le choix des 12 lunettes. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de paires de lunettes défectueuses.

1. Justifier que X est distribuée selon une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité de n'avoir aucune paire de lunettes défectueuse.
3. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le cadre de cet énoncé.

PARTIE 2

Soit Y la variable aléatoire qui, à toute paire de lunettes de réalité augmentée, prélevée au hasard dans la production, associe son autonomie en minutes. On admet que Y est distribuée selon la loi normale de moyenne $\mu = 420$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. Quelle est la probabilité qu'une paire de lunettes ait une autonomie de moins de 400 min ?
2. On dit qu'une paire de lunettes est suffisamment performante si son autonomie se situe entre 400 et 440 minutes. Déterminer la probabilité qu'une paire de lunettes soit suffisamment performante.

PARTIE 3

Le service après-vente de l'entreprise constate que, sur l'ensemble de la production, 15 % des paires de lunettes sont retournées dans la première année.
On rappelle que : pour une proportion connue p dans une population, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :

$$I_f = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 de la fréquence des paires de lunettes retournées dans la première année.
2. Dans un des magasins, un revendeur remarque que, pour son magasin, sur 600 paires de lunettes vendues, il doit en retourner 100 au service après-vente au cours de la première année.

   Exploiter ce résultat pour évaluer si ce magasin est représentatif du nombre de retours au service après-vente de l'entreprise.

EXERCICE 2 **5 points**

La production mensuelle d'une autre entreprise de lunettes varie entre 1 000 et 9 000 pièces.
La fonction f est définie sur $[1 ; 9]$ par :

$$f(x) = -x^2 + 14x - 13 - 12 \times \ln(x)$$

où ln est la fonction logarithme népérien.
f représente le bénéfice mensuel en dizaine de milliers d'euros pour la vente de x milliers de lunettes.

1. Soit f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[1 ; 9]$. Pour tout x de l'intervalle $[1 ; 9]$, calculer $f'(x)$ puis prouver que $f'(x)$ peut s'écrire :

$$f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-6)}{x}$$

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[1 ; 9]$.

3. En déduire le tableau de variations de f sur $[1 ; 9]$. On précisera les valeurs exactes de $f(1)$, de $f(6)$ et de $f(9)$.

4. Déterminer le nombre de pièces à vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Préciser la valeur de ce bénéfice arrondi à l'euro près.

EXERCICE 3 **4 points**

Dans une région montagneuse, le syndicat de la filière caprine a mis en place des actions pour promouvoir l'élevage de chèvres.
Par conséquent, il a été observé une augmentation du cheptel de chèvres de 2 % par an.
En 2017, le cheptel de chèvres dans cette région est évalué à 6 000 têtes.
On suppose que cette évolution se poursuit dans les années qui suivent.
On note u_0 le nombre de chèvres en 2017, u_n le nombre de chèvres l'année $(2017 + n)$.

1. Calculer le nombre de têtes en 2018 puis en 2019.

2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Variables :
N est du type nombre entier naturel
U est du type nombre réel
Initialisation :
N prend la valeur 0
U prend la valeur 6 000
Traitement :
Tant que U < 8 000
    N prend la valeur N + 1
    U prend la valeur U × 1,02
Fin tant que
Sortie :
Afficher 2017 + N
```

a. Expliquer ce que réalise cet algorithme dans le contexte de cet exercice.

b. Par la méthode de votre choix que vous préciserez, donner la valeur affichée par cet algorithme.

EXERCICE 4 **4 points**

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et soit f' sa fonction dérivée.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-après.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.
La droite T est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 3.
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.
À l'aide du graphique et en justifiant la démarche adoptée :

1. Déterminer l'image de 3 par la fonction f.
2. Déterminer la valeur de $f'(3)$.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.

Graphe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f (exercice 4) :