Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant Antilles–Guyane – Polynésie 7 juin 2019

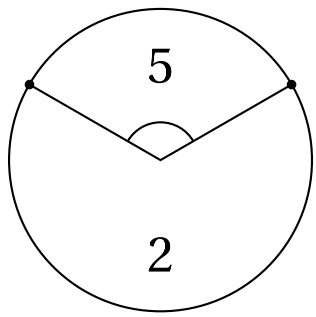
La calculatrice est autorisée.

Les annexes A, B et C sont à rendre avec la copie après avoir été numérotées

Les quatre exercices sont indépendants

EXERCICE 1 **7,5 points**

Le directeur du marketing d'un magasin envisage un jeu, dans lequel les clients peuvent obtenir un rabais sur le montant de leurs courses.
Le client fait tourner deux fois la roue de la chance. La roue de la chance a deux secteurs comme indiqué ci-dessous :



On effectue deux lancers indépendants de la roue de la chance qui est bien équilibrée. Le pourcentage de rabais est calculé comme le produit des deux nombres sur lesquels la roue de la chance s'est arrêtée.

PARTIE A

On note C l'évènement : « la roue de la chance s'est arrêtée sur 5 » ;
D l'évènement : « la roue de la chance s'est arrêtée sur 2 ».

1. Montrer que la probabilité que la roue s'arrête sur le nombre 5 est $\dfrac{1}{3}$.
2. Compléter les probabilités sur chacune des branches de l'arbre de probabilités fourni en annexe A (à rendre avec la copie après avoir été numérotée).
3. On note X la variable aléatoire qui à tout client associe le pourcentage de rabais obtenu.
   a. Indiquer les valeurs pouvant être prises par la variable aléatoire X.
   b. Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X fourni en annexe A (à rendre avec la copie après avoir été numérotée) (les résultats des probabilités seront écrits sous forme de fractions).
   c. Calculer $\text{E}(X)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE B

On admet que la probabilité qu'un client obtienne un rabais de 25 % est de $\dfrac{1}{9}$.
On interroge au hasard 10 clients. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour que le choix puisse être assimilé à un tirage successif avec remise.
On note N la variable aléatoire indiquant le nombre de clients ayant obtenu un rabais de 25 %.

1. Justifier que N est distribuée selon une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Déterminer à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins un client parmi les 10 obtienne une remise de 25 %.

PARTIE C

Le directeur du marketing considère que l'opération est un succès si elle attire 10 % de nouveaux clients.

1. Sous l'hypothèse que l'opération est un succès :

   Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 de la fréquence de nouveaux clients pour un échantillon de taille 200. Les bornes seront arrondies à 10^{-3} près.

   On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 d'une fréquence pour les échantillons de taille n est :

$$\left[p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

2. Le directeur du marketing organise une enquête.

   Sur un échantillon de 200 clients, 16 sont venus pour la première fois dans le magasin.

   Indiquer si l'on peut considérer que l'opération est un succès. Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **2 points**

Un élève est adepte d'une application de jeu sur son téléphone portable.
Aujourd'hui, il a un score de 10 000 points.
Quand il ne joue plus, un joueur perd 3 % des points du score du jour précédent. Par exemple, le premier jour, il perd 3 % de 10 000 points et n'a plus que 9 700 points. Le jour suivant, il perdra 3 % de 9 700 points et ainsi de suite.
Cet élève souhaite savoir son nombre de points restants s'il ne joue plus pendant tout un mois que l'on supposera être de 30 jours.

1. Compléter l'algorithme fourni en annexe A (à rendre avec la copie après avoir été numérotée) afin de répondre à ce souhait.

2. À l'aide de la méthode de votre choix, calculer le nombre de points restant à l'élève s'il ne joue plus pendant 30 jours (arrondir au point près). Justifier votre réponse.

EXERCICE 3 **4 points**

La courbe $\mathscr{C}_f$, donnée dans l'annexe B, est la courbe représentative d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé.
La droite T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
On admet que les conventions graphiques usuelles sont respectées. En particulier, les variations de la fonction f en dehors du schéma de l'annexe B sont celles suggérées par le schéma.
Dans l'annexe B (à rendre avec la copie après avoir été numérotée), cocher, pour chaque question, l'unique réponse qui convient.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

EXERCICE 4 **6,5 points**

On a mesuré le taux de luminosité en fonction de la profondeur exprimée en mètres dans un plan d'eau.
On voudrait, dans un premier temps, évaluer à quelle profondeur le taux de luminosité en pourcentage devient inférieur à 10.
On choisit de modéliser le taux de luminosité, exprimé en pourcentage, à l'aide de la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

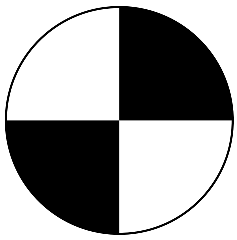
$$g(x) = l00\mathrm{e}^{-0,08x} \quad \text{où } x\text{désigne la profondeur exprimée en mètres.}$$

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans ce repère.

1. Calculer $g(0)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
3. En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
4. Étudier la limite de g en $+\infty$.
5. Compléter le tableau de valeurs donné en annexe C (à rendre avec la copie après avoir été numérotée). (les résultats seront arrondis à l'unité).
6. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g sur $[0\,;\,+\infty[$ sur l'annexe C (à rendre avec la copie après avoir été numérotée).

   Unités graphiques : abscisses : 1 cm pour 5 unités, ordonnées : 1 cm pour 10 unités.
7. À l'aide de la courbe, répondre graphiquement à la problématique posée au début de l'exercice, c'est-à-dire savoir à quelle profondeur le taux de luminosité devient inférieur à 10 % (laisser les tracés apparents).

   La zone photique du plan d'eau (zone exposée à une lumière suffisante pour que la photosynthèse se produise) correspond à une zone entre la surface et une profondeur où le taux de luminosité est supérieur à 1 %. Elle peut se mesurer approximativement à l'aide d'un disque de Secchi.

   Disque de Secchi

   Avec ce disque, on a trouvé une zone allant de la surface à une profondeur comprise entre 40 et 70 mètres et l'on souhaite une mesure plus précise de cette profondeur.
8. Résoudre, par le calcul, l'inéquation :

   $g(x) > 1$ (la réponse sera donnée au mètre près).

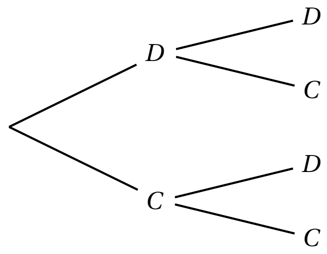
   En déduire la zone photique du plan d'eau.

ANNEXE A (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 1

Partie A : Question 2 : probabilité sur chaque branche de l'arbre

1^er^ tour de roue 2^e^ tour de roue



Partie A Question 3. b. : Tableau à compléter

x_i	4	...	...
$p(X = x_i)$	...	...	...

EXERCICE 2 - Algorithme

Variable :
P est du type nombre réel

Initialisation :
P prend la valeur 10 000

Traitement :

Pour i allant de 1 à ...

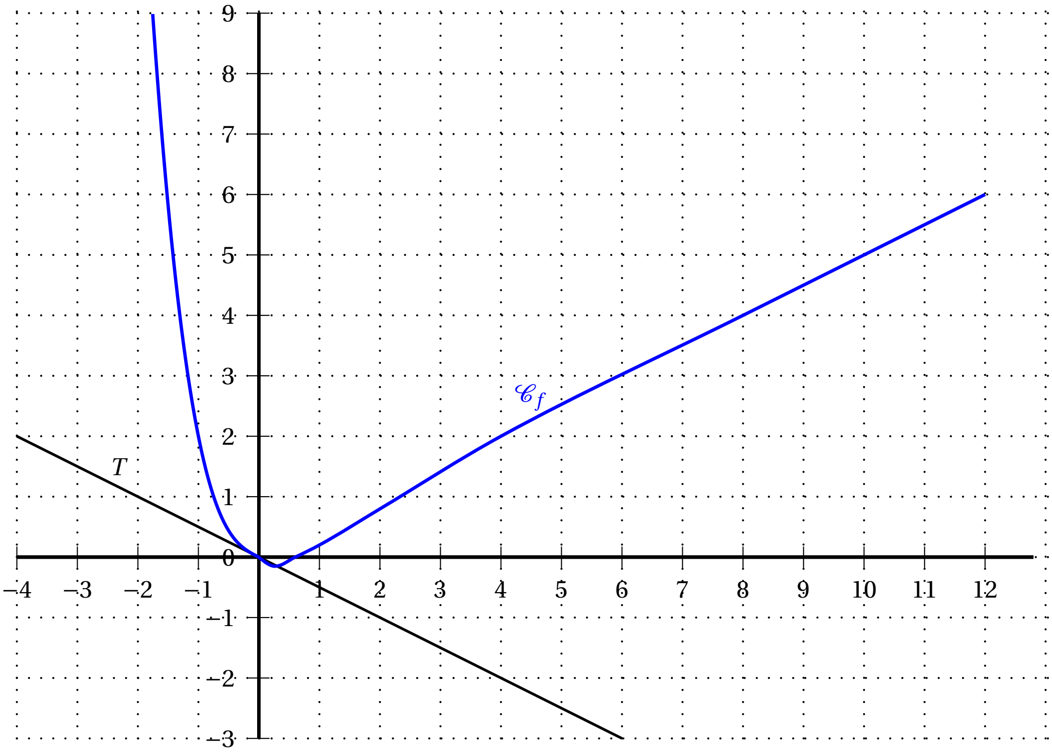
P prend la valeur
.
Fin Pour

Sortie :

Afficher P

ANNEXE B (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3 – QCM



1. L'image de 0 par f est :

☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ 1

2. L'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$

☐ 0 solution ☐ 1 solution ☐ 2 solutions ☐ on ne peut pas savoir

3. Le nombre dérivé de f en 0 est :

☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ 1

4. La fonction f est croissante sur un ensemble qui contient :

☐ $[-1 ; 1]$ ☐ $[1 ; +\infty[$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $]-\infty ; 0]$

5. La seule limite possible, parmi les 4 propositions suivantes, de la fonction f en $+\infty$ est :

☐ $\dfrac{1}{2}x$ ☐ 0 ☐ 6 ☐ $+\infty$

ANNEXE C (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 4

Question 6 - Tableau de valeurs

x	0	5	10	15	20	25	30	35
$g(x)$								

Question 7 - Graphique