Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
novembre 2012 Nouvelle-Calédonie   Correction

Exercice 1 **4,5 points**

Caroline fait partie d'un groupe de 8 personnes suivant une formation à raison de 5 séances par semaine.
À chaque séance, le formateur interroge au hasard l'un des participants indépendamment de l'interrogation des séances précédentes.

1. La probabilité que Caroline soit interrogée lors d'une séance est de 0,125 car le formateur interroge au hasard, d'où l'équiprobabilité, une personne sur huit ; $\dfrac{1}{8} = 0{,}125$.
2. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de fois où Caroline est interrogée sur une semaine.
   a. Déterminons la nature de la loi de probabilité de X et précisons ses paramètres. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$.
   Le nombre n de prélèvements est 5 et la probabilité que Caroline soit interrogée est 0,125.
   Nous avons donc une loi binomiale $X \hookrightarrow \mathscr{B}(5;\ 0{,}125)$ par conséquent $p(X = k) = \binom{5}{k}(0{,}125)^k(0{,}875)^{5-k}$.
   b. Calculons la probabilité que Caroline soit interrogée exactement 2 fois dans la semaine. Calculons $p(X = 2)$.
   $p(X = 2) = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} 0{,}125^2 \times 0{,}875^3 \approx 0{,}1047$ à 10^{-4} près.
   c. Calculons $p(X \geqslant 2)$
   $$p(X \geqslant 2) = 1 - \big(p(X = 0) + p(X = 1)\big) = 1 - \left(0{,}875^5 + 5 \times 0{,}125 \times 0{,}875^4\right) = 1 - (0{,}5129 + 0{,}3664) \approx 0{,}1207.$$
   Ce résultat est la probabilité que Caroline soit interrogée au moins deux fois dans la semaine.

Exercice 2 **4,5 points**

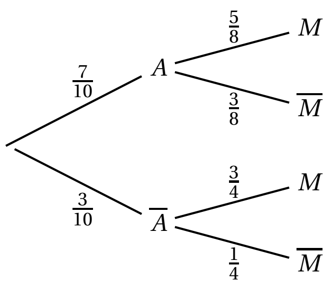
On a interrogé un groupe de personnes (adultes et enfants) suite à la projection du film « Nature ». On a obtenu les résultats suivants :
- 3/10 des personnes interrogées sont des enfants ;
- 5/8 des adultes ont apprécié le film ;
- 1/4 des enfants n'ont pas apprécié le film.

On choisit au hasard une personne du groupe. On note :

A l'événement : « La personne interrogée est un adulte » ;
M l'événement : « La personne interrogée a apprécié le film ».

Tous les résultats des probabilités seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Construisons l'arbre de probabilité décrivant la situation en indiquant les probabilités sur chaque branche.



2. Calculons $p(A \cap M)$.
   $p(A \cap M) = p(A) \times p_A(M) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{7}{16}$. Ce résultat est la probabilité que la personne interrogée soit un adulte ayant apprécié le film.
3. Calculons la probabilité de l'événement : « La personne interrogée a apprécié le film »c'est-à-dire $p(M)$.
   $p(M) = p(A \cap M) + p(\overline{A} \cap M) = p(A) \times p_A(M) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(M) = \dfrac{7}{16} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{16} + \dfrac{9}{40} = \dfrac{53}{80}$.
4. La personne interrogée a apprécié le film ; la probabilité que cette personne soit un adulte est notée $p_M(A)$.
   $p_M(A) = \dfrac{p(A \cap M)}{p(M)} = \dfrac{\frac{7}{16}}{\frac{53}{80}} = \dfrac{7}{16} \times \dfrac{80}{53} = \dfrac{35}{53}$.

Exercice 3 **11 points**

La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée en **annexe A** (à rendre avec la copie) est la représentation graphique, dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite $\left(T_{\text{A}}\right)$, parallèle à l'axe des abscisses, est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.
La droite $\left(T_{\text{B}}\right)$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0.
La droite (D), d'équation $y = 2$, est asymptote à $\mathscr{C}_f$, en $+\infty$.

PARTIE A

Par lecture graphique et en expliquant la démarche adoptée, :

1. Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0 c'est-à-dire l'ordonnée de B, $f(0) = -1$;
   nous lisons le coefficient directeur de la droite (T_{B}) $f'(0) = 1$.
2. L'équation réduite de (T_{B}) est $y = x-1$. L'équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est $y = mx + p$; nous avons déterminé aux questions précédentes les valeurs de m et de p.
3. Déterminons la limite de f en $+\infty$. La droite (D), d'équation $y = 2$, est asymptote à $\mathscr{C}_f$, en $+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
4. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Nous lisons avec la précision permise par le graphique -1,2 ou 0,9.
5. La solution de l'équation $f'(x) = 0$ est l'abscisse du point en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire $-\dfrac{1}{2}$.

PARTIE B

On admet que la fonction numérique f de la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2-(2x+3)\text{e}^{-x}$.

1. Déterminons la limite de f en $-\infty$.
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2 - \lim_{x\to-\infty}(2x+3)\text{e}^{-x} = 2+\infty = +\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -(2x+3) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$.
2. **a.** Démontrons que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (2x+5)\text{e}^{-x}+2x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Pour ce faire, montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.
   $F'(x) = 2\text{e}^{-x} + (2x+5)\left((-1)\text{e}^{-x}\right) + 2 = 2 + (2-(2x+5))\,\text{e}^{-x} = 2-(2x+3)\text{e}^{-x} = f(x)$.

   b. Donnons une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$. Les primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante, nous pouvons prendre par exemple comme primitive de f, la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par
   $G(x) = (2x+5)\text{e}^{-x}+2x+1$.

   c. Graphiquement nous pouvons constater que sur l'intervalle $[2\,;\,3]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située dans le demi-plan des y positifs. Il en résulte que pour tout x de l'intervalle $[2\,;\,3]$ nous avons $f(x) \geqslant 0$.

   d. Calculons la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-2} près, de l'aire $\mathscr{A}$ (exprimée en unités d'aire) du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 3$.
   Pour tout x appartenant à $[2\,;\,3]$ on a $f(x) \geqslant 0$, l'aire $\mathscr{A}$ est, en unités d'aire, $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\text{d}x$.
   $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\text{d}x = \Big[F(x)\Big]_2^3 = F(3)-F(2) = (2\times3+5)\text{e}^{-3}+2\times3-\left((2\times2+5)\text{e}^{-2}+2\times2\right)$
   $\mathscr{A} = 11\text{e}^{-3}-9\text{e}^{-2}+2 = \left(2\text{e}^{3}-9\text{e}+11\right)\text{e}^{-3} \approx 1,33$.
   L'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 3$ vaut à 10^{-2} près 1,33 unité d'aire.

ANNEXE A à rendre avec la copie