Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole La Réunion juin 2023

Le sujet comporte 6 pages

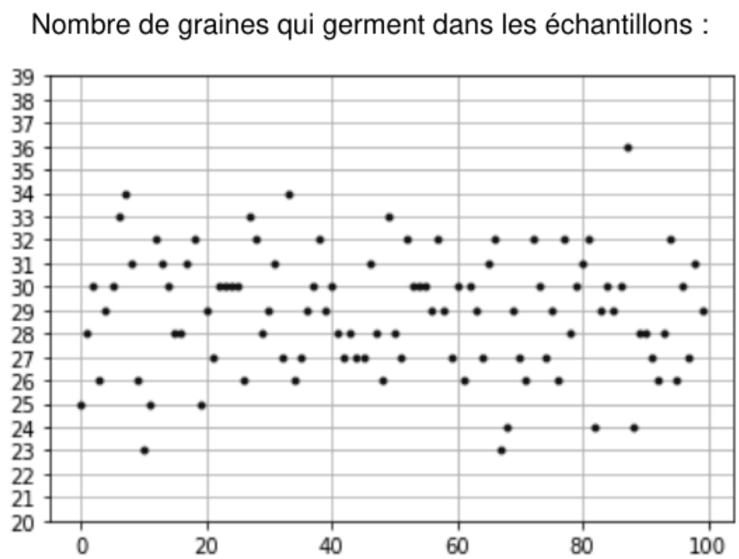
L'annexe A est à rendre avec la copie après avoir été numérotée

Le thème d'étude de ce sujet concerne les betteraves.
Toutefois, les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 1 : **(5 points)**

Pour vérifier la qualité d'un sac de graines de betteraves, on peut tester leur faculté germinative. Dans cet exercice, on se place dans le cas d'un sac contenant un très grand nombre de graines et dont la faculté germinative est de 73 %. Cela signifie qu'une graine issue de ce sac a une probabilité de 0,73 de germer une fois plantée.
On procède à l'expérimentation qui consiste à prélever au hasard un échantillon de 40 graines de ce sac. Comme le nombre de graines du sac est très grand, on assimile le tirage à un tirage avec remise. On les plante dans des conditions extrêmement favorables. Au bout de quelques jours, on considère que les graines n'ayant pas germé ne germeront jamais et on note X le nombre de graines ayant germé.

1. Justifier que la loi de X est la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,73$.
2. Calculer $P(X = 40)$. Que peut-on en conclure ?
3. En moyenne, si on considère qu'une graine qui germe donne une betterave, combien de betteraves peut-on espérer obtenir en plantant 40 graines issues de ce sac ?
4. On a simulé 100 fois l'expérimentation et on obtient le graphique suivant, qui montre le nombre de graines germées dans chacun des 100 échantillons de taille 40.



   a. Au vu de cette simulation, donner le pourcentage d'échantillons pour lesquels le nombre de graines ayant germé appartient à l'intervalle $[24 ; 34]$.
   b. Lors de la réalisation de l'expérience, 35 graines ont germé. Peut-on remettre en cause la faculté germinative de 73 % indiquée sur le sac ? Argumenter votre réponse.

5. Pour effectuer la simulation précédente, on a utilisé un tableur.

	A	B	C	...	AN	AO	AP
1	Échantillon n°	Graine 1	Graine 2	...	Graine 39	Graine 40	Total
2	1	1	0	$\cdots$	1	1	32
3	2	1	1	$\cdots$	0	1	30
4	3	0	1	$\cdots$	1	1	34

a. Pour simuler la germination d'une graine (1 la graine germe, 0 la graine ne germe pas) avec une probabilité de 0,73, quelle formule, à recopier sur votre copie par la suite, doit-on entrer en B2 ?

=SI(ALEA()<0,73 ;0 ;1)   =ALEA.ENTRE.BORNES(0,73)   =SI(ALEA()<0,73 ;1 ;0)

b. Pour compter le nombre de graines ayant germé dans un échantillon, quelle formule, à recopier par la suite, doit-on saisir dans AP2 ?

=SOMME(A2 :AO2)   =SOMME(B2 :AO2)   =SOMME(B$2 :AO$2)

EXERCICE 2 : (3 points)

La position de la racine de la betterave dans le sol implique plus ou moins de travail pour la récolter. On se demande si la forme (pointue, arrondie ou aplatie) de la racine a une influence sur cette position (superficielle, moyennement enterrée, enterrée) et on réalise une expérimentation avec 420 betteraves pour tester l'influence de la forme de la racine sur la position dans le sol. On obtient les résultats suivants présentés dans un tableau croisé.

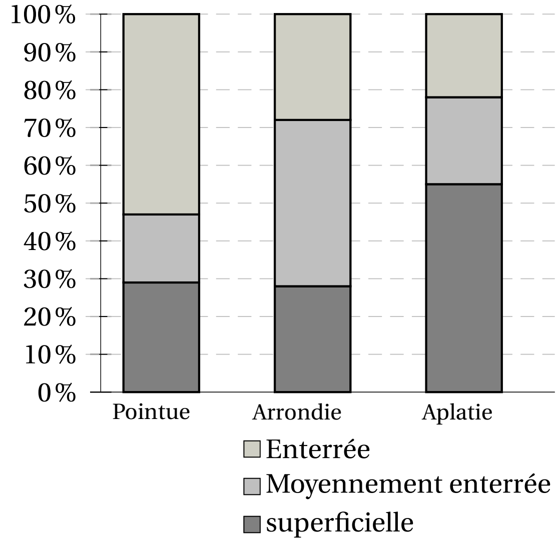
	Pointue	Arrondie	Aplatie
Superficielle	40	56	44
Moyennement enterrée	20	92	18
Enterrée	76	56	18

On prélève une betterave au hasard parmi les 420 betteraves et on note les événements :

S : « la position est superficielle. »

A : « la forme de la racine est aplatie. »

1. Justifier que $P(S) = \dfrac{1}{3}$ et calculer $P_A(S)$.
2. Les événements A et S sont-ils indépendants ? Justifier.
3. Au cours d'une expérimentation similaire faite dans une autre région, on obtient le diagramme des fréquences conditionnelles selon la forme de la racine.



D'après ce graphique, la forme de la racine semble-t-elle avoir une influence sur la position de la racine dans le sol? Argumenter votre réponse.

EXERCICE 3 : **(6 points)**

La densité de la population de betteraves d'un champ a une influence sur leur masse. En effet, moins les racines sont serrées et plus elles peuvent grossir.
On a recueilli les données suivantes d'une expérimentation :

X : Densité de la population en milliers de plantes/ha	30	45	60	75	100
Y : Masse moyenne des betteraves en kg	2,6	2	1,5	1,2	1

1. Sur **l'annexe A (à rendre avec la copie après avoir été numérotée)**, on a représenté le nuage de points correspondant aux données. Sur ce graphique, tracer « au jugé » une droite d'ajustement de ce nuage.
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrés. Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.
3. **a.** Estimer, à l'aide du modèle de la question précédente, la masse moyenne des betteraves pour une population de 100 000 plantes/ha.
   b. Calculer la différence de masse observée entre la valeur réelle et la valeur estimée pour 100 000 plantes/ha.
   c. En déduire le pourcentage d'erreur commise sur l'estimation par rapport à la masse moyenne réelle pour 100 000 plantes/ha.
4. Pour améliorer l'estimation, on effectue un changement de variable en posant $Z = \dfrac{1}{Y}$.
   Compléter le tableau de valeur sur **l'annexe A (à rendre avec la copie après avoir été numérotée)**. Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.
5. En ajustant Z en X par la méthode des moindres carrés, expliquer comment faire pour obtenir l'ajustement d'équation $Y = \dfrac{1}{0,01X + 0,11}$.

Pour une betterave, devenir plus grosse n'est pas un atout car il est plus difficile techniquement d'extraire le sucre d'une betterave de 2 kg que d'une betterave d'1 kg. L'exploitant effectue un comptage pour connaître la densité de la population de betteraves.

6. En dessous de quelle densité de population de betteraves l'exploitant doit-il s'attendre à avoir des betteraves de plus de 1,7 kg en moyenne ? Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 4 : **(6 points)**

Toutes les betteraves récoltées ne peuvent être vendues et conditionnées en même temps. Il est donc nécessaire de les conserver. Une technique de conservation des betteraves est de les mettre en silo, on construit une série de mini-silos obéissant aux contraintes suivantes :

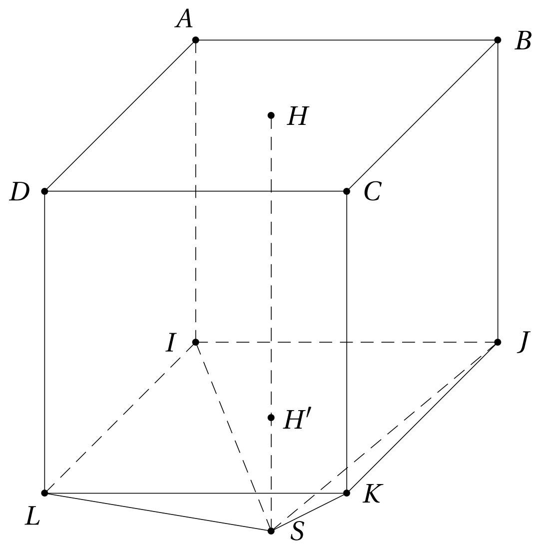
— ABCDIJKL est un cube.

— H et H' sont les centres respectifs des carrés ABCD et IJKL.

— IJKLS est une pyramide ayant pour base le carré IJKL et de sommet S, aligné avec H et H'.

— Le segment [HS] mesure 1,5 m.

Soit x la longueur du côté du cube en mètres, $x \in [0\ ;\ 1,5]$.



Partie A : Modélisation du contexte

1. Justifier que la hauteur H'S de la pyramide est égale à $\dfrac{3}{2} - x$.

Rappel : Le volume d'une pyramide à base carrée de côté x et de hauteur h est : $\dfrac{1}{3} \times x^2 \times h$.

2. Justifier que le volume de la pyramide IJKLS est $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$
3. En déduire que le volume du mini-silo en fonction de x est donné par la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

Partie B : Étude de la fonction

1. Donner une expression de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f .
2. Justifier que $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0\ ;\ 1,5]$.

3. En déduire le tableau de variation complet de f sur l'intervalle $[0\,;1,5]$.
(On y fera apparaître les valeurs extrêmes)

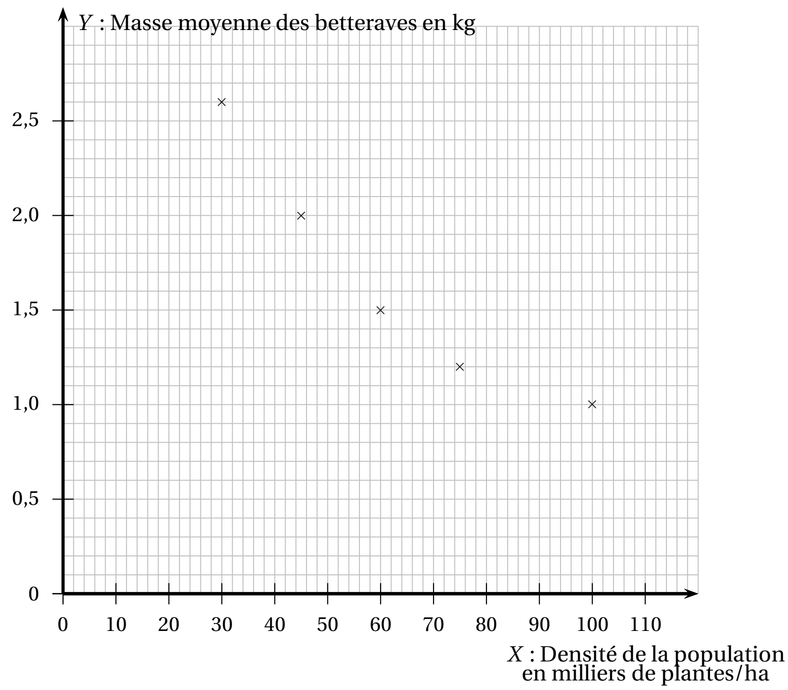
Partie C : Résolution d'un problème

L'expérimentateur souhaite avoir des mini-silos dont le volume est de $2\,\text{m}^3$.

1. On cherche la valeur approchée de x au centième pour laquelle le volume du silo est de $2\,\text{m}^3$. Quelle équation doit-on résoudre ?
2. Grâce à la dernière question de la **partie B**, on considère qu'il est possible d'utiliser la méthode par balayage pour résoudre approximativement cette équation.
   - **a.** Compléter les 4 pointillés de l'algorithme en Python sur **l'annexe A** pour obtenir une valeur approchée de x à 10^{-2} près.
   - **b.** À l'exécution, on obtient l'affichage de « 1,240 000 000 000 000 9 ». Justifier que ce résultat est cohérent et conclure.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3
Question 1



EXERCICE 3
Question 4

X	30	45	60	75	100
Y	2,6	2	1,5	1,2	1
Z					

EXERCICE 4
Partie C, Question 2

```
def f(x) :
    return ...

x =0
pas = 10**−2
while f(x) <= ⋯
      X = ⋯

print(⋯)
```