Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole septembre 2009

Exercice 1 **8 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Dans une ferme du Cotentin, on commercialise trois types de lait sous forme de briques de 1 litre :

- 15 % des briques contiennent du lait entier.
- 60 % des briques contiennent du lait 1/2 écrémé.
- 25 % des briques contiennent du lait écrémé.

Le lait peut être vitaminé ou non vitaminé :

- $\frac{1}{3}$ des briques de lait entier sont de qualité vitaminée.
- $\frac{5}{12}$ des briques de lait 1/2 écrémé sont de qualité vitaminée.
- $\frac{1}{5}$ des briques de lait écrémé sont de qualité vitaminée.

On choisit une brique au hasard. On considère les évènements suivants :

A « La brique contient du lait entier »
B « La brique contient du lait 1/2 écrémé »
C « La brique contient du lait écrémé »
V « La brique contient du lait vitaminé »

1. Décrire la situation ‡ l'aide d'un arbre de probabilités en indiquant les probabilités sur chaque branche.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a. « La brique contient du lait écrémé et vitaminé ».
   b. « La brique contient du lait vitaminé ».
3. Quelle est la probabilité, arrondie ‡ 10^{-4} près que le lait soit écrémé sachant qu'il est vitaminé ?

Partie B

Sur un lot de 20 briques de lait, 5 contiennent du lait écrémé. On choisit au hasard et simultanément 3 briques de ce lot.

1. Calculer le nombre total de choix possibles. Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de briques de lait écrémé parmi les 3 choisies.
   a. Calculer la probabilité de n'avoir aucune brique de lait écrémé.
   b. Calculer la probabilité d'avoir exactement une brique de lait écrémé.
3. Compléter la loi de probabilité de X dans le tableau donné en annexe.

Exercice 2 **8 points**

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée **dans le document** est celle d'une fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$.
La droite (T) est tangente ‡ la courbe $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse 1.
L'axe des ordonnées est asymptote ‡ la courbe $(\mathscr{C})$.

1. Déterminer par lecture graphique, en expliquant votre démarche :

a. $f(1)$ et $f'(1)$.

b. La limite de f en 0.

c. Le signe de $f(x)$ sur $[2\,;\,+\infty[$.

2. On admet que f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$.

b. Retrouver par le calcul les résultats de la question 1. a.

c. Déterminer le signe de $f'(x)$ et donner le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (x-1)\ln x - x$ est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. En déduire la valeur arrondie ‡ 10^{-2} près de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \mathrm{e}$ et $x = 5$.

Exercice 3 VRAI–FAUX **4 points**

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE. Justifier vos réponses.
Une réponse exacte non justifiée ne rapporte pas de point.

Proposition 1 : $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Proposition 2 : La courbe représentative de la fonction g passe par le point de coordonnées $\left(-1\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$.

Proposition 3 : $g(\ln 2) = \ln 2$.

Proposition 4 : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

. . . .

ANNEXE : ‡ compléter et ‡ rendre avec la copie

Exercice 1

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$				$\dfrac{1}{114}$

DOCUMENT

Exercice 2