Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole septembre 2009 Correction

Exercice 1 **8 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans une ferme du Cotentin, on commercialise trois types de lait sous forme de briques de 1 litre :

- 15 % des briques contiennent du lait entier.
- 60 % des briques contiennent du lait 1/2 écrémé.
- 25 % des briques contiennent du lait écrémé.

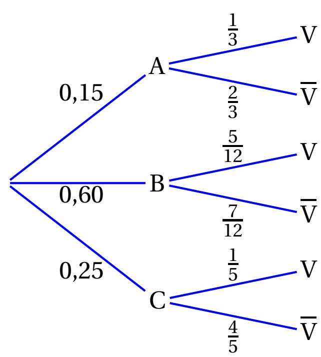
Le lait peut être vitaminé ou non vitaminé :

- $\frac{1}{3}$ des briques de lait entier sont de qualité vitaminée.
- $\frac{5}{12}$ des briques de lait 1/2 écrémé sont de qualité vitaminée.
- $\frac{1}{5}$ des briques de lait écrémé sont de qualité vitaminée.

On choisit une brique au hasard. On considère les événements suivants :

A « La brique contient du lait entier » ;
B « La brique contient du lait 1/2 écrémé » ;
C « La brique contient du lait écrémé » ;
V « La brique contient du lait vitaminé ».

1. Construisons l'arbre de probabilités décrivant la situation.



2. Calculons la probabilité des événements suivants :

a. « La brique contient du lait écrémé et vitaminé ».

$$P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

b. « La brique contient du lait vitaminé ».

$$P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V) + P(C \cap V)$$
$$P(V) = \frac{3}{20} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{12} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$$
$$P(V) = \frac{1}{20} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$
$$P(V) = \frac{7}{20}$$

3. Calculons la probabilité, arrondie ‡ 10^{-4} près, que le lait soit écrémé sachant qu'il est vitaminé.

$$P_V(C) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{23}{20}} = \frac{5}{69} \approx 0{,}0725$$

Partie B

Sur un lot de 20 briques de lait, 5 contiennent du lait écrémé. On choisit au hasard et simultanément 3 briques de ce lot. L'univers est l'ensemble des prélèvements possibles et la loi sur cet univers est l'équiprobabilité.

1. Calculons le nombre total de choix possibles.
Nous choisissons 3 briques parmi les 20 briques de lait. Nous avons donc $\binom{20}{3} = 1\,140$ choix possibles.
Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de briques de lait écrémé parmi les 3 choisies.

a. Calculons la probabilité de n'avoir aucune brique de lait écrémé.
Nous choisissons 3 briques parmi les 15 qui ne contiennent pas du lait écrémé.
Nous avons donc $\binom{15}{3} = 455$ choix possibles.
$p(X = 0) = \dfrac{455}{1\,140} = \dfrac{91}{228}$

b. Calculons la probabilité d'avoir exactement une brique de lait écrémé.
Nous choisissons 2 briques parmi celles qui ne contiennent pas du lait écrémé et une brique parmi les 5 qui contiennent du lait écrémé.
Nous avons $\binom{15}{2} \times \binom{5}{1} = 525$ choix possibles.
Par conséquent $P(X = 1) = \dfrac{525}{1\,140} = \dfrac{35}{76}$

3. La loi de probabilité de X est complété dans le tableau donné en annexe.

Exercice 2 **8 points**

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée **dans le document** est celle d'une fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$.
La droite (T) est tangente ‡ la courbe $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse 1.
L'axe des ordonnées est asymptote ‡ la courbe $(\mathscr{C})$.

1. Déterminons par lecture graphique :

a.
- $f(1) = -1$ c'est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1 ;
- $f'(1) = 2$. C'est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 ‡ la courbe.
  Cette droite passe par les points $(0\,;\,-3)$ et $(1\,;\,-1)$ d'où $m = \dfrac{-1-(-3)}{1-0} = 2$

b. La limite de f en 0. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ car l'axe des ordonnées est asymptote ‡ la courbe.

c. Le signe de $f(x)$ sur $[2\,;\,+\infty[$.
Sur cet intervalle, la courbe est située dans le premier quadrant et coupe l'axe des abscisses en un point n'appartenant pas ‡ cet intervalle.
Il en résulte $f(x) > 0$ pour $x \in [2\,;\,+\infty[$.

2. On admet que f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$.

a. Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$. $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x+1}{x^2}$.

b. Calculons alors $f(1)$ et $f'(1)$. $f(1) = \ln(1) - \frac{1}{1} = -1$, $\qquad f'(1) = \dfrac{1+1}{1^2} = 2$. Ce sont bien les résultats de la question 1) a).

c. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$ comme quotient de deux nombres réels strictement positifs.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
$f'(x) > 0$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle. Dressons le tableau de variations de f.

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **a.** Montrons que la fonction F définie par $F(x) = (x-1)\ln x - x$ est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. Pour ce faire, montrons que la fonction F a pour fonction dérivée la fonction f.

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + (x-1) \times \left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln(x) + \frac{x-1}{x} - 1 = \ln(x) - \frac{1}{x} = f(x)$$

b. Calculons la valeur exacte de l'intégrale I.

I$= \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(\mathrm{e}) = (5-1)\ln(5) - 5 - ((\mathrm{e}-1) - \mathrm{e}) = 4\ln 5 - 4.$

c. L'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \mathrm{e}$ et $x = 5$ est $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ car sur cet intervalle $f(x) > 0$. La valeur arrondie ‡ 10^{-2} près de $(\mathscr{A})$ est 2,44 unités d'aire.

Exercice 3 VRAI–FAUX **4 points**

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquons en justifiant si elle est VRAIE ou FAUSSE.

Une réponse exacte non justifiée ne rapporte pas de point.

Proposition 1 : $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. **Vraie**

Sur cet intervalle $2x > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Le produit de deux réels positifs étant positif, l'affirmation est vraie.

Proposition 2 : La courbe représentative de la fonction g passe par le point de coordonnées $\left(-1\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$. **Fausse**

Calculons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse -1. $g(-1) = 2 \times (-1)\mathrm{e}^{-(-1)} = -2\mathrm{e}$. $g(-1) \neq \dfrac{2}{\mathrm{e}}$ Le point n'appartient pas ‡ la courbe représentative de g.

Proposition 3 : $g(\ln 2) = \ln 2$. **Vraie**

$$g(\ln(2) = 2\ln(2)\mathrm{e}^{-\ln(2)} = 2\ln(2) \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} = \ln 2.$$

Proposition 4 : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$. **Vraie**

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x \times \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = -\infty \times +\infty = -\infty$$

....

ANNEXE :

Exercice 1

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\dfrac{91}{228}$	$\dfrac{35}{76}$	$\dfrac{5}{38}$	$\dfrac{1}{114}$

DOCUMENT

Exercice 2