Sciences et Technologies de l'Agronomie et de l'Environnement
Métropole session 2005

Exercice 1

On dispose d'une roue parfaitement équilibrée comportant 12 secteurs de même taille, numérotés de 1 à 12. Les secteurs 3 et 9 sont verts et les autres jaunes.

Partie A

L'épreuve consiste à faire tourner la roue :
Si elle s'arrête sur un secteur vert, on tire un billet de loterie dans une urne A. Sinon on tire un billet de loterie dans une urne B.
Dans l'urne A, un billet sur 4 est gagnant. Dans l'urne B, un billet sur 10 est gagnant.
On considère les évènements suivants :
A : « on tire le billet dans l'urne A » ;
G : « le billet tiré est gagnant ».

1. **a.** Montrer que $p(\text{A}) = \dfrac{1}{6}$.
   b. Décrire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités en précisant les valeurs des probabilités sur chaque branche.
2. **a.** Calculer $p(\text{G} \cap \text{A})$. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*
   b. Montrer que $p(\text{G}) = \dfrac{1}{8}$.
3. Sachant que le billet tiré est gagnant, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'urne A. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

Partie B

On répète 10 fois, de façon indépendante, l'épreuve décrite dans la partie A.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de billets gagnants obtenus en 10 épreuves.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{8}$.
2. Calculer $p(X = 5)$ puis $p(X \geqslant 1)$. Les résultats seront donnés sous forme décimale et arrondis à 10^{-4} près.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]-2~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2\ln(x+2)$$

et (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. **a.** Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b. Calculer la limite de f en -2 et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x + 2}{x+2}$.

3. Dresser le tableau de variation de f sur $]-2\,;\,+\infty[$.
4. Recopier et compléter le tableau suivant :
   Les valeurs numériques de $f(x)$ seront arrondies à 10^{-2} près.

x	$-1,8$	-1	0	1	2	$2,5$
$f(x)$						

5. Construire la courbe $\left(\mathrm{C}_f\right)$, sa tangente au point d'abscisse -1 et son asymptote dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Exercice 3

Résolution dans l'intervalle $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ de l'équation : $\cos x = x$.

Vous trouverez sur le document joint, dans un repère orthonormal, les représentations graphiques $(\mathscr{C}_u)$ et $(\mathscr{C}_v)$ des fonctions u et v respectivement définies sur I par :

$$u(x) = \cos x \quad \text{et} \quad v(x) = x.$$

1. Par lecture graphique, et en expliquant la démarche adoptée, résoudre sur l'intervalle I l'équation : $u(x) = v(x)$.
2. On considère la fonction h définie sur I par : $h(x) = x - \cos x$.
   a. Déterminer $h'(x)$.
   b. Justifier que pour tout x de l'intervalle $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $h'(x)$ est strictement positif.
   c. En déduire le tableau de variations de h sur I.
   d. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans I.
   e. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Conclure en donnant un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution de l'équation $\cos x = x$ dans l'intervalle I.