Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant session 2008 Correction

Exercice 1

Le tableau suivant donne, pour un lycée, la répartition des effectifs suivant deux critères : le sexe et l'appartenance à la section sportive du lycée :

	Élèves membres de la section sportive	Élèves non membres de la section sportive	Total
Filles	100	300	400
Garçons	200	400	600
Total	300	700	1 000

On choisit un élève au hasard dans ce lycée et on note F, G et S les évènements suivants :
F : l'élève est une fille ;
G : l'élève est un garçon ;
S : l'élève est membre de la section sportive.

Partie A : QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève pas et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie sera zéro.

Pour chaque question posée, la réponse convenable est cochée. L'univers est l'ensemble des élèves du lycée. La loi mise sur cet univers est la loi équirépartie. La probabilité d'un évènement A est $p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$

1. La probabilité d'obtenir une fille membre de la section sportive est :

☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ $\dfrac{1}{4}$ ☑ $\dfrac{1}{10}$

Dans le lycée,il y a cent filles membres de la section sportive. $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{S}) = \dfrac{100}{1000} = 0,1$.

2. On interroge une fille.
La probabilité qu'elle soit non membre de la section sportive est égale à :

☑ 0,75 ☐ $\dfrac{3}{7}$ ☐ 0,3

La probabilité cherchée est $p_{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{S}}) = \dfrac{300}{400} = 0,75$.

3. $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{G})$ est égale à :

☐ $\dfrac{1}{3}$ ☑ $\dfrac{2}{3}$ ☐ $\dfrac{1}{5}$

La probabilité que l'élève choisi soit un garçon sachant qu'il est membre de la section sportive est $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}) = \dfrac{200}{300} = \dfrac{2}{3}$.

4. $p(\mathrm{S} \cup \mathrm{F})$ est égale à :

☐ 0,7 ☑ 0,6 ☐ 0,1

$p(\mathrm{S} \cup \mathrm{F}) = \mathrm{P}(\mathrm{F}) + p(\mathrm{S}) - p(\mathrm{S} \cap \mathrm{F}) = 0,3 + 0,4 - 0,1 = 0,6$.

Partie B

Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.
On souhaite constituer une délégation de 10 élèves. Le choix des 10 élèves est assimilé à des tirages successifs indépendants.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'élèves membre de la section sportive dans cette délégation.

1. L'expérience consiste à choisir au hasard un élève et à examiner si l'élève est membre de la section sportive. Dans cette expérience, les deux issues possibles sont :
– succès : « L'élève est membre de la section sportive », la probabilité de succès est 0,3.

– échec : « L'élève n'est pas membre de la section sportive », la probabilité d'échec est 0,7.
L'expérience précédente est répétée 10 fois dans les mêmes conditions et de façon indépendante. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres (10 ; 0,3). Par conséquent $p(\mathrm{X}=k)=\binom{10}{k}(0,3)^k(0,7)^{10-k}$

2. Déterminons la probabilité d'obtenir dans la délégation exactement 5 membres de la section sportive.

$$p(\mathrm{X}=5)=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}(0,3)^5(0,7)^5\approx 0,1029.$$

La probabilité que la délégation comporte exactement cinq membres de la section sportive est environ 0,103 à 10^{-3} près.

3. Déterminons la probabilité d'obtenir dans la délégation au moins un membre de la section sportive.

$$p(\mathrm{X}\geqslant 1)=1-p(\mathrm{X}=0)=1-(0,7)^{10}\approx 0,9118.$$

La probabilité que la délégation comporte au moins un membre de la section sportive est environ 0,912 à 10^{-3} près.

Exercice 2

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée dans le document représente une fonction f définie sur $]-\infty\,;\,2]$ par une expression de la forme

$$f(x)=-\mathrm{e}^{2x}+a\mathrm{e}^x+b$$

o˘ a et b sont deux réels. (T) est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

1. par lecture graphique :
   - $f(0)=1$; nous lisons l'ordonnée du point en lequel la courbe coupe l'axe des ordonnées.
   - $f'(0)=6$. C'est le coefficient directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(0\,;\,1)$ et $(-1\,;\,-5)$; $m=\dfrac{-5-1}{-1-0}=6$.
2. Déterminons $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$. $f'(x)=-(2\mathrm{e}^{2x})+a(\mathrm{e}^x)$.
3. Déterminons les réels a et b. Nous avons alors $\begin{cases}f(0)=-\mathrm{e}^0+a\mathrm{e}^0+b=1\\f'(0)=-2\mathrm{e}^0+a\mathrm{e}^0=6\end{cases}$ ou en simplifiant $\begin{cases}-1+a+b=1\\-2+a=6\end{cases}$.

   Nous obtenons $\begin{cases}b=-6\\a=8\end{cases}$. f est par conséquent définie par $f(x)=-\mathrm{e}^{2x}+8\mathrm{e}^x-6$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,2]$ par :

$$f(x)=-\mathrm{e}^{2x}+8\mathrm{e}^x-6.$$

1. Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{\to-\infty}-\mathrm{e}^{2x}+\lim_{x\to-\infty}8\,\mathrm{e}^x+\lim_{x\to-\infty}(-6)=0+0+(-6)=-6.$$

   Graphiquement, la courbe représentative de f est asymptote à la droite d'équation $y=-6$.

2. Déterminons la fonction dérivée de f sur $]\infty\,;\,2]$. $f'(x)=-(2\mathrm{e}^{2x})+8(\mathrm{e}^x)$. En factorisant par e^x nous obtenons : pour tout x de l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$ $f'(x)=\mathrm{e}^x(8-2\mathrm{e}^x)$.

   Nous aurions pu mettre $2\mathrm{e}^x$ *en facteur.* $f'(x)=2\mathrm{e}^x(4-e^x)$

3. **a.** Résolvons dans $]-\infty\,;\,2]$ l'équation $f'(x)=0$.

$2\mathrm{e}^x(4-\mathrm{e}^x)=0$	$\mathrm{e}^x=4$	$x=2\ln 2$
$4-\mathrm{e}^x=0$	$x=\ln 4$	$x\approx 1,386$

   L'ensemble des solutions de l'équation est $\{2\ln 2\}$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ par conséquent $f'(x)$ est du signe de $8 - 2\mathrm{e}^x$ ou de $4 - \mathrm{e}^x$ pour tout x de $]-\infty\,;\,2]$.

c. Résolvons dans $]-\infty\,;\,2]$ l'inéquation $8 - 2\mathrm{e}^x > 0$.

$$2(4 - \mathrm{e}^x) > 0 \qquad \mathrm{e}^x < 4 \qquad x < 2\ln 2$$
$$4 - \mathrm{e}^x > 0 \qquad x < \ln 4$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\infty\,;\,2\ln 2\right[$

d. Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,2\ln 2\right[$, $f'(x) > 0$. Par conséquent, f est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Pour tout $x \in \left]2\ln 2\,;\,2\right]$, $f'(x) < 0$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur cet intervalle.
$f(\ln 4) = -\mathrm{e}^{2\ln 4} + 8\mathrm{e}^{\ln 4} - 6 = -16 + 32 - 6 = 10$.
$f(2) = -\mathrm{e}^4 + 8\mathrm{e}^2 - 6$.
Dressons maintenant le tableau de variations de f sur $]-\infty\,;\,2]$.

x	$-\infty$		$2\ln 2$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f			10		
	-6				$-\mathrm{e}^4+8\mathrm{e}^2-6$

4. a. Déterminons une primitive F de f sur $]-\infty\,;\,2]$.

$$\mathrm{F}(x) = -\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right) + 8\mathrm{e}^x - 6x + \mathrm{C}$$

b. Calculons la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. La fonction f étant positive et strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 7\mathrm{e} - 6$, l'aire du domaine est définie par $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_0^1 = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 8\mathrm{e} - 6 - \left(-\frac{1}{2} + 8\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 8\mathrm{e} - \frac{27}{2}.$$

L'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ vaut $-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 8\mathrm{e} - \dfrac{27}{2}$ unités d'aire.

Représentation graphique de f