Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant session 2008 Correction

Exercice 1

Dans un lycée, 200 élèves de classes terminales passent tous un baccalauréat : général ou bien technologique.

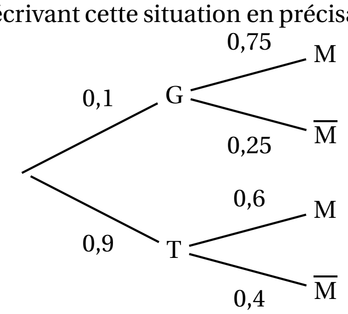
Partie A

On a les informations suivantes :

- 20 élèves du lycée passent le baccalauréat général ;
- 25 % des élèves passant le baccalauréat général n'y ont pas obtenu la moyenne ;
- 60 % des élèves passant le baccalauréat technologique y ont obtenu la moyenne.

Soit G l'évènement « l'élève passe le baccalauréat général » ;
T l'évènement « l'élève passe le baccalauréat technologique » ;
M l'évènement « l'élève a obtenu la moyenne au baccalauréat ».
L'épreuve consiste à tirer au hasard une fiche dans le fichier des 200 élèves.

1. L'univers est l'ensemble du fichier et la loi mise sur cet univers est la loi équirépartie.
   La probabilité d'un événement A est $p(\text{A}) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$
   a. Calculons $p(\text{G})$; Vingt élèves passent un baccalauréat général sur les deux cents élèves de classes terminales donc $p(\text{G}) = \dfrac{20}{200} = 0{,}1$
   b. Construisons l'arbre de probabilités décrivant cette situation en précisant les probabilités sur chaque branche.



2. **a.** Calculons
   – la probabilité $p(\text{M} \cap \text{T})$.

$$p(\text{M} \cap \text{T}) = p(\text{T}) \times p_{\text{T}}(\text{M}) = 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}54.$$

   – la probabilité $p(\text{M} \cap \text{G})$.

$$p(\text{M} \cap \text{G}) = p(\text{G}) \times p_{\text{G}}(\text{M}) = 0{,}1 \times 0{,}75 = 0{,}075.$$

   b. $p(\text{M}) = p(\text{M} \cap \text{T}) + p(\text{M} \cap \text{G}) = 0{,}54 + 0{,}075 = 0{,}615.$

3. Calculons, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un élève ayant obtenu la moyenne au baccalauréat soit issu d'un baccalauréat général.

$$p_{\text{M}}(\text{G}) = \frac{p(\text{M} \cap \text{G})}{p(\text{M}} = \frac{0{,}075}{0{,}615} \approx 0{,}12$$

Partie B

Dans cette partie, les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près.

On appelle X la variable aléatoire égale à la moyenne obtenue par les candidats du baccalauréat général. La loi de X est la loi normale de moyenne 11 et d'écart - type 4.$X \hookrightarrow \mathcal{N}(11\ ;\ 4)$
Dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est la loi normale $\mathcal{N}(11\ ;\ 4)$, est équivalent à dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire U définie par $\dfrac{X-11}{4}$ est la loi normale centrée et réduite.

a. La probabilité qu'un candidat ait obtenu une note inférieure à 12 est notée $p(X \leqslant 12)$.
Cette probabilité est équivalente à $p\left(U \leqslant \frac{1}{4}\right)$.
Dans la table de la loi normale centrée réduite, nous pouvons lire que $p(U \leqslant 0{,}25) = 0{,}5987$.
Par conséquent, $p(X \leqslant 12) = 0{,}5987$.

b. La probabilité qu'un candidat ait obtenu une note supérieure à 15 est notée $p(X \geqslant 15)$.
Cette probabilité est équivalente à $p(U \geqslant 1)$ ou encore à $1 - p(U < 1)$.
Dans la table de la loi normale centrée réduite, nous pouvons lire que $p(U < 1) = 0{,}8413$.
Par conséquent $p(X \geqslant 15) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$.

Exercice 2

La courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ donnée dans le document représente, dans un repère orthogonal, une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $\text{I} = \left[-\dfrac{3\pi}{2}~;~\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

1. Par *lecture graphique*,

a. – $g(0) = 3$; nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0.
– $g'(0) = -1$; $g'(0)$ est le coefficient directeur de(T), droite passant par $(0~;~3)$ et par $(3~;~0)$.

b. Une équation de la droite (T') est $y = -x - 3$. La droite passe par $(0~;~-3)$ et $(-5~;~2)$.

c. Résolvons dans I, l'équation : $g'(x) = -1$. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation est : $\mathscr{S} = \{-\pi,~0,~\pi\}$.
Les droites (T) et (T') sont tangentes à $(\mathscr{C}_g)$ aux points d'abscisses 0, π, $-\pi$ et ont comme coefficient directeur -1.

2. *Étude théorique*
On admet que la fonction g est définie sur I par : $g(x) = -x + 3\cos x$.

a. $g'(x) = -1 - 3\sin x$.

b. Résolvons dans I, l'équation : $g'(x) = -1$.

$$\begin{aligned} -1 - 3\sin x &= -1 \\ -3\sin x &= 0 \\ \sin x &= 0 \end{aligned}$$

d'où $x = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
Par conséquent dans I, $x = 0, \qquad x = \pi, \qquad x = -\pi$.
$\mathscr{S} = \{-\pi,~0,~\pi\}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]3~;~6]$ par :

$$f(x) = x - 2 + \ln(x-3)$$

et $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminons la limite de f en 3.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x - 2 + \lim_{x\to 3} \ln(x-3) = -\infty.$$

car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$.
Graphiquement, la courbe admet la droite d'équation $x = 3$ comme asympote lorsque x tend vers 3.

2. Déterminons la fonction dérivée f' de la fonction f sur $]3~;~6]$.
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{x-3+1}{x-3} = \dfrac{x-2}{x-3}$
Pour tout $x \in]3~;~6]$, $x - 2 > 0$ et $x - 3 > 0$ par conséquent pour tout x appartenant à $]3~;~6]$, $f'(x) > 0$.

3. **a.** Dressons le tableau de variation de f sur]3 ; 6].

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Pour tout x appartenant à]3 ; 6], $f'(x) > 0$ f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

$f(6) = 6 - 2 + \ln(6 - 3) = 4 + \ln 3$

x	3	6
$f'(x)$	+	
Variations de f	$-\infty$	$4 + \ln 3$

b. $f(4) = 4 - 2 + \ln(4 - 3) = 2$.

f étant strictement croissante sur]3 ; 6] a fortiori sur [4 ; 6] et $f(4) > 0$; par conséquent f est strictement positive sur [4 ; 6].

4. Soit F la fonction définie sur]3 ; 6] par

$$F(x) = (x - 3)\ln(x - 3) + \frac{x^2}{2} - 3x.$$

F est une primitive de f sur]3 ; 6] si $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = 1 \times \ln(x - 3) + (x - 3)\left(\frac{1}{x - 3}\right) + x - 3 = \ln(x - 3) + 1 + x - 3 = x - 2 + \ln(x - 3) = f(x).$$

5. **a.** Calculons la valeur exacte de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_4^6 f(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\mathrm{J} = \int_4^6 f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_4^6 = F(6) - F(4) = (6 - 3)\ln(6 - 3) + \frac{6^2}{2} - 3 \times 6 - \left((4 - 3)\ln(4 - 3) + \frac{4^2}{2} - 3 \times 4\right) = 3\ln 3 + 4.$$

b. $f > 0$ sur [4 ; 6], J dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 6$.

Document de l'exercice 2
Courbe $\left(\mathcal{C}_g\right)$

– La droite (T) est tangente à $\left(\mathcal{C}_g\right)$ au point d'abscisse 0.
– La droite $\left(T'\right)$ est tangente à $\left(\mathcal{C}_g\right)$ aux points A et B d'abscisse respectives π et $-\pi$.