Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole septembre 2008 Correction

Exercice 1

Partie A

La fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est représentée dans le document joint.
(T) est la tangente à la représentation graphique de g au point d'abscisse 1.
Par lecture graphique :

1. • $g(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1.
   • $g'(1) = 0$. La tangente au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est égal à 0. Le coefficient directeur de la tangente en a à $\mathscr{C}_f$ est $f'(a)$.
2. Pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ on a $g(x) < 3$ car le graphique montre que e^{-1} est le maximum de la fonction sur cet intervalle, et $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}367\,879$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 3\ln x$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm sur chacun des axes.

1. **a.** Déterminons la limite de f en 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x} + \lim_{x\to 0} 3\ln x = 1 + (-\infty) = -\infty$$

Graphiquement, la courbe $\mathscr{C}_f$ est asymptote à l'axe des ordonnées.

b. Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-x} + \lim_{x\to +\infty} 3\ln x = 0 + (+\infty) = +\infty$$

2. **a.** Calculons $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-x\mathrm{e}^{-x} + 3}{x} = \frac{3 - g(x)}{x}$$

b. Déterminons le signe de $f'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. Pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - g(x)$.
Or nous avons écrit que $g(x) < 3$ donc $3 - g(x) > 0$. Par conséquent, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$

c. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$, par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3.

x	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-1{,}5$	0,4	2,2	3,3	4,2	4,8

Les résultats sont arrondis à 10^{-1} près.

4. La courbe représentative de la fonction f est tracée page 4.

Partie C

Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(x) = x\ln x - x$.

1. **a.** H est une primitive de la fonction ln sur $]0\ ;\ +\infty[$ si $H'(x) = \ln x$.

$$H'(x) = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x$$

b. Déterminons une primitive F de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 3(x\ln x - x) + C = -\mathrm{e}^{-x} + 3x\ln x - 3x + C.$$

2. Calculons, en unité d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

La fonction f étant positive et strictement croissante sur $[1\ ;\ 2]$, l'aire du domaine est définie par $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

$$\mathscr{A} = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_1^2 = F(2) - F(1) = -\mathrm{e}^{-2} + 6\ln 2 - 6 - \left(-\mathrm{e}^{-1} - 3\right) = -\mathrm{e}^{-2} + 6\ln 2 - 3 + \mathrm{e}^{-1}.$$

L'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$ vaut $6\ln 2 - 3 + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}$ unités d'aire.

L'unité d'aire vaut 4 cm^2. Une valeur arrondie de cette aire à 10^{-2} près est 5,57 cm^2.

Exercice 2

Dans plusieurs lycées, on recense le nombre d'élèves inscrits en STAV en septembre 2006. Chaque élève a choisi un seul EIL (enseignement d'initiative locale) parmi trois :
aménagement (A), transformation (T) et services (S).
On dénombre 200 élèves parmi lesquels 120 filles.

- 60 % des élèves sont inscrits en EIL aménagement
- 20 % des élèves sont inscrits en EIL transformation
- 12 filles sont inscrites en EIL transformation
- 70 % des élèves inscrits en EIL aménagement sont des filles.

On note :

- T l'événement « être inscrit en EIL transformation » ;
- F l'événement « être une fille » ;
- S l'événement « être inscrit en EIL services » ;
- G l'événement « être un garçon » ;
- A l'événement « être inscrit en EIL aménagement ».

Les parties A et B sont indépendantes. Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

Partie A

1. Le tableau est complété page 4.
2. L'univers est l'ensemble des élèves inscrits en septembre 2006. Le choix ayant lieu au hasard, la loi mise sur cet univers est la loi équirépartie. La probabilité d'un événement A est $p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$.
   Calculons les probabilités suivantes :
   - $p(\mathrm{A})$. En EIL aménagement, il y a 120 élèves inscrits sur un total de 200 donc $p(\mathrm{A}) = \dfrac{120}{200} = \dfrac{3}{5}$
   - $p(\mathrm{G})$. Parmi les 200 élèves, il y a 80 garçons donc $p(\mathrm{G}) = \dfrac{80}{200} = \dfrac{2}{5}$.
   - $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{G})$. Parmi les 200 élèves, il y a 36 garçons inscrits en EIL aménagement $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{G}) = \dfrac{36}{200} = \dfrac{9}{50}$.
     $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{G}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{G}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{G})$ d'où $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{G}) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{9}{50} = \dfrac{41}{50}$.
3. La probabilité d'être un garçon inscrit en EIL transformation est notée $p(\mathrm{T} \cap \mathrm{G})$. Parmi les 200 élèves, il y a 28 garçons inscrits en EIL transformation $p(\mathrm{T} \cap \mathrm{G}) = \dfrac{28}{200} = \dfrac{7}{50}$.

4. On interroge un garçon. La probabilité qu'il soit inscrit en EIL aménagement est notée $p_{\text{G}}(\text{A})$.

$$p_{\text{G}}(\text{A}) = \frac{p(\text{A} \cap \text{G})}{p(\text{G})} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{2}{5}} = \frac{9}{20}$$

Partie B

On s'intéresse aux 12 filles inscrites en EIL transformation parmi lesquelles 3 sont internes. On veut constituer un groupe de 4 élèves choisi au hasard parmi ces 12 filles pour représenter ces lycées dans une assemblée.

1. Montrons qu'il y a 495 groupes possibles.
Nous choisissons 4 personnes parmi les 12 filles. Nous avons donc $\binom{12}{4} = 495$ choix possibles.

2. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre d'internes parmi les 4 élèves choisis.

a. Les valeurs possibles prises par X sont 0, 1, 2 ou 3.

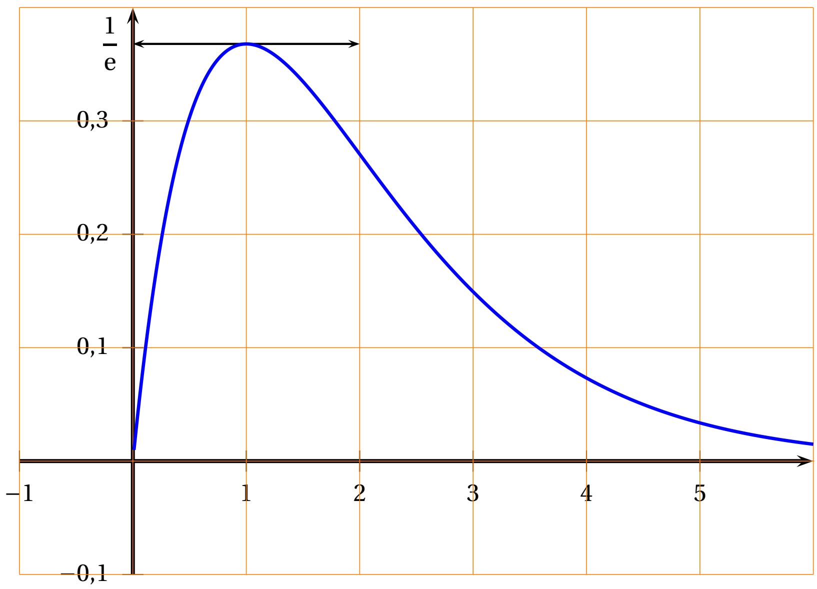
b. Calculons $p(X = 1)$. Nous choisissons 1 fille parmi les 3 internes et nous complétons en choisissant 3 filles parmi les 9 qui ne sont pas internes. $p(X = 1) = \dfrac{\binom{3}{1} \times \binom{9}{3}}{495} = \dfrac{28}{55}$

c. Donnons la loi de probabilité de X. Calculons $p(X = k)$ pour $k \in \{0;2;3\}$ et le tableau est complété page 4.

- $p(X = 0)$. Nous choisissons les 4 filles parmi les 9 qui ne sont pas internes. $p(X = 0) = \dfrac{\binom{9}{4}}{495} = \dfrac{14}{55}$
- $p(X = 2)$. Nous choisissons 2 filles parmi les 3 internes et nous complétons en choisissant 2 filles parmi les 9 qui ne sont pas internes. $p(X = 2) = \dfrac{\binom{3}{2} \times \binom{9}{2}}{495} = \dfrac{12}{55}$
- $p(X = 3)$. Nous choisissons les 3 internes et nous complétons en choisissant 1 fille parmi les 9 qui ne sont pas internes. $p(X = 3) = \dfrac{\binom{9}{1}}{495} = \dfrac{1}{55}$

DOCUMENT : exercice 1

Représentation graphique de g



ANNEXE

Exercice 2

Partie A Tableau

SexeEIL	T	A	S	Total
F	12	84	24	120
G	28	36	16	80
Total	40	120	40	200

Partie B Loi de probabilité de X

Valeurs de X	0	1	2	3
Probabilités	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

Exercice 1 **Représentation graphique de f**