# Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
# Métropole correction septembre 2010

**Exercice 1** **4 points**

La courbe $\mathscr{C}_f$, donnée en annexe A représente une fonction $f$ définie sur $[-4~;~1[$.
La droite $T$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Par lecture graphique complétons le **QCM** donné en **annexe A**.
*Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie sera zéro.*

**Exercice 2** **10 points**

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]-\infty~;~1]$ par

$$g(x) = 2x + 3 - \mathrm{e}^{2x}.$$

On appelle $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$d'unités graphiques
- 3 cm sur l'axe des abscisses
- 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminons la limite de g en $-\infty$ .
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x+3 - \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = -\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2x+3 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$.
2. Déterminons $g'(x)$ pour tout $x$ de l'intervalle $]-\infty~;~1]$. $g'(x) = 2 - 2\mathrm{e}^{2x} = 2(1-\mathrm{e}^{2x})$.
3. **a.** Résolvons sur $]-\infty~;~1]$ l'équation $1-\mathrm{e}^{2x} = 0$.

$$1-\mathrm{e}^{2x} = 0 \qquad \mathrm{e}^{2x} = 1 \qquad \ln(\mathrm{e}^{2x}) = \ln(1) \qquad 2x = 0 \qquad x = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\{0\}$

**b.** Résolvons sur $]-\infty~;~1]$ l'inéquation $1-\mathrm{e}^{2x} > 0$.

$$1-\mathrm{e}^{2x} > 0 \qquad \mathrm{e}^{2x} < 1 \qquad \ln(\mathrm{e}^{2x}) < \ln(1) \qquad 2x < 0 \qquad x < 0.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty~;~0[$.

**c.** $g'(x)$ est du signe de $1-\mathrm{e}^{2x}$ car $g'(x)$ est le produit de $1-\mathrm{e}^{2x}$ par 2 et 2 est strictement positif.
Par conséquent $g'(x) > 0$ si $x \in ]-\infty~;~0[$ $g'(x) < 0$ si $x \in ]0~;~1]$.
4. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors $f$ est strictement croissante sur $I$.
$g'(x) > 0$ pour $x \in ]-\infty~;~0[$ par conséquent $g$ est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction $f$ est strictement décroissante sur $I$.
$g'(x) < 0$ pour $x \in ]-0~;~1]$ par conséquent $g$ est strictement décroissante sur cet intervalle.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $g$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $5-\mathrm{e}^2$ |

5. Le tableau de valeurs a été complété sur l' annexe B
6. La courbe $\mathscr{C}_g$ est tracée à la fin.

7. **a.** Déterminons une primitive $G$ de $g$ sur $]-\infty\ ;\ 1]$. $G(x) = x^2 + 3x - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

**b.** $g(x) > 0$ pour $x \in [-1\ ;0]$. L'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$ est $\displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = G(0) - G(-1) = -\frac{1}{2} - \left(1 - 3 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}\right) = \frac{3 + \mathrm{e}^{-2}}{2}.$$

$\mathscr{A} = \dfrac{3 + \mathrm{e}^{-2}}{2}$ u.a.

**c.** L'unité d'aire vaut 3 cm$^2$. $\mathscr{A} \approx 4{,}70$ cm$^2$ arrondie au mm$^2$ près.

**Exercice 3** **6 points**

Madame Boulard possède un élevage de chats de race : des siamois, des birmans et des abyssins. Elle passe une annonce pour vendre ses chatons.
Un petit garçon Pierre, vient acheter un chaton avec sa mère.
Comme ils sont tous adorables et qu'il n'arrive pas à choisir, Pierre décide de prendre un chaton au hasard.
On désigne par :

S l'événement : « Le chaton est siamois » ;

B l'événement : « Le chaton est birman » ;

A l'événement : « Le chaton est abyssin » ;

M l'événement : « Le chaton est un mâle » ;

F l'événement : « Le chaton est une femelle ».

On sait de plus que 40,96 % de ces chatons sont des mâles.
*Les probabilités seront données sous forme décimale et arrondies si nécessaire à* $10^{-4}$ *près.*

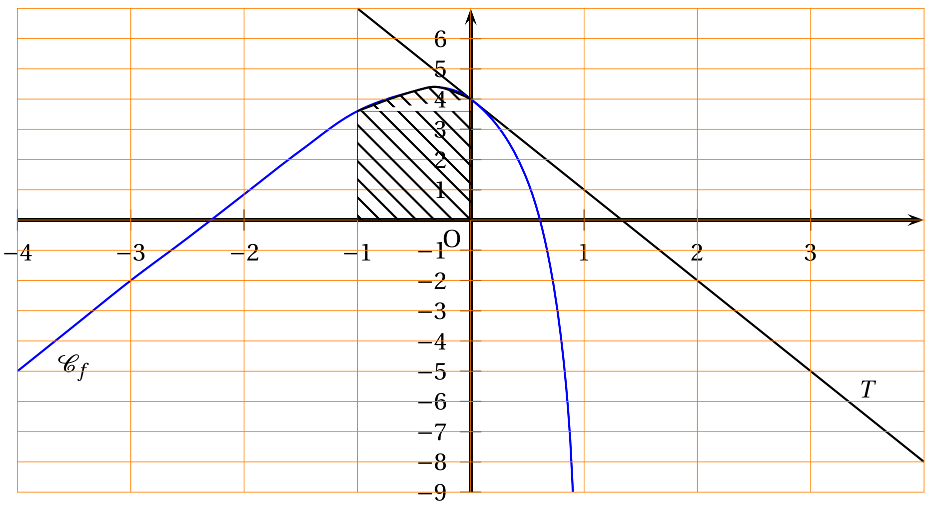
1. **a.** Calculons la probabilité $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{S})$.
$p(\mathrm{M} \cap \mathrm{S}) = p(\mathrm{S}) \times p_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}) = 0{,}32 \times 0{,}54 = 0{,}1728$.

   **b.** Calculons la probabilité $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{A})$.
$p(\mathrm{M} \cap \mathrm{A}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = 0{,}54 \times 0{,}34 = 0{,}1836$.

   **c.** Calculons la probabilité $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{B})$.
$p(\mathrm{M} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = 0{,}14 \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$.
Calculons $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$. Nous savons que la probabilité que ce soit un mâle est 0,4096.
$p(\mathrm{M}) = p(\mathrm{M} \cap \mathrm{S}) + p(\mathrm{M} \cap \mathrm{A}) + p(\mathrm{M} \cap \mathrm{B}) = 0{,}1728 + 0{,}1836 + 0{,}14 \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = 0{,}4096$.
$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = 0{,}4096 - (0{,}1728 + 0{,}1836) = 0{,}38$.
La probabilité que Pierre choisisse un chaton mâle sachant qu'il est birman est 0,38.

2. L'arbre des probabilités est complété sur l' **annexe B**.
3. Calculons la probabilité que Pierre choisisse un chaton siamois sachant que c'est un mâle.
$p_{\mathrm{M}}(\mathrm{S}) = \dfrac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{S})}{p(\mathrm{M})} = \dfrac{0{,}1728}{0{,}4096} = 0{,}4219$.
4. Calculons la probabilité que Pierre choisisse un chaton abyssin sachant que c'est une femelle.
$p_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = \dfrac{p(\mathrm{F} \cap \mathrm{A})}{p(\mathrm{F})} = \dfrac{0{,}54 \times 0{,}66}{1 - 0{,}4096} = 0{,}6037$.

**Exercice 1**




**QCM**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.
**Cocher**, pour chaque question posée, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

**1.** $f(0)$ est égal à :

☐ $-2,3$ ☐ $0,5$ ☑ $4$

ordonnée du point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.

**2.** $f'(0)$ est égal à :

☑ $-3$ ☐ $3$ ☐ $-1,5$

coefficient directeur de la droite passant par $(0\,;4)$ et $(2\,;\,-2)$.

**3.** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ est égal à :

☐ $+\infty$ ☐ $1$ ☑ $-\infty$

**4.** L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=0$ est approximativement égale à :

☐ $2,1$ ☑ $4,2$ ☐ $5,3$

C'est l'aire de la partie hachurée.

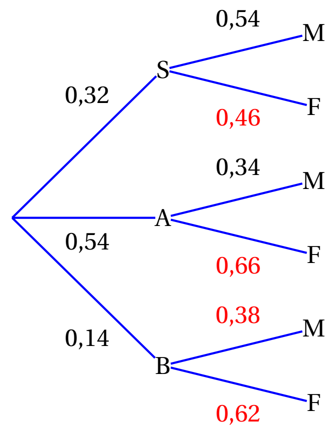
**ANNEXE B (à compléter et à rendre avec la copie)**

**Exercice 2**

*Les résultats seront arrondis à* $10^{-1}$ *près*

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-7$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $-0,9$ | $1,6$ | $2$ | $1,3$ | $-2,4$ |

**Exercice 3**




**courbe de l'exercice 2**