Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant correction septembre 2011

L'annexe A est à rendre avec la copie

Exercice 1 **8 points**

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-4} *près si nécessaire.*

Miguel est un basketteur confirmé plutôt adroit aux lancers francs.
Après étude de ses performances, son entraîneur a constaté que quand il bénéficie d'une série de deux lancers francs :

- Il réussit le premier lancer dans 95 % des cas.
- Quand il rate le premier lancer, il rate aussi le deuxième dans 3 cas sur 10.
- Quand il réussit le premier lancer, il réussit aussi le deuxième dans 90 % des cas.

Au cours d'un match, Miguel bénéficie d'une série de deux lancers francs. On note :

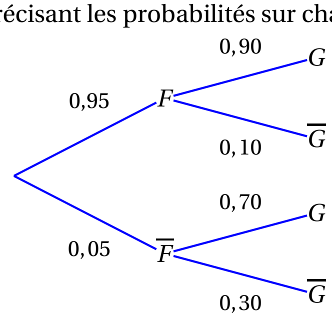
- F l'évènement : « Miguel réussit le premier lancer ».
- G l'évènement : « Miguel réussit le deuxième lancer ».

1. À l'aide de l'énoncé, écrivons :

a. La probabilité qu'il réussisse le premier lancer. $p(F) = 0{,}95$

b. La probabilité qu'il réussisse le deuxième lancer sachant qu'il a réussi le premier. $P_F(G) = 0{,}90$

2. Construisons l'arbre de probabilités, en précisant les probabilités sur chacune des branches.



3. La probabilité de voir Miguel réussir les deux lancers est

$$P(F\cap G) = P(F) \times P_F(G) = 0{,}95 \times 0{,}90 = 0{,}855.$$

4. La probabilité qu'il réussisse le deuxième lancer sachant qu'il a raté le premier est $P_{\overline{F}}(G) = 0{,}70$.

5. La probabilité qu'il réussisse le deuxième lancer.

$$P(G) = P(F\cap G) + P(\overline{F}\cap G) = 0{,}855 + 0{,}05 \times 0{,}7 = 0{,}89$$

6. Son entraîneur est arrivé en retard et voit Miguel réussir le deuxième lancer. La probabilité qu'il ait aussi réussi le premier lancer de la série est

$$P_F(G) = \frac{P(F\cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}855}{0{,}89} \approx 0{,}9608$$

Au cours d'un autre match, il bénéficie de 10 séries de deux lancers francs. On considère qu'il réussit la série quand les deux lancers sont réussis. On admet que les séries sont réalisées de façon indépendante.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de séries réussies.

7. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$.
Nous avons donc une loi binomiale de paramètres $(10\,;\,0{,}855)$ par conséquent $p(X = k) = \binom{10}{k}(0{,}855)^k(0{,}145)^{10-k}$

8. Calculons la probabilité qu'il réussisse exactement 7 séries.

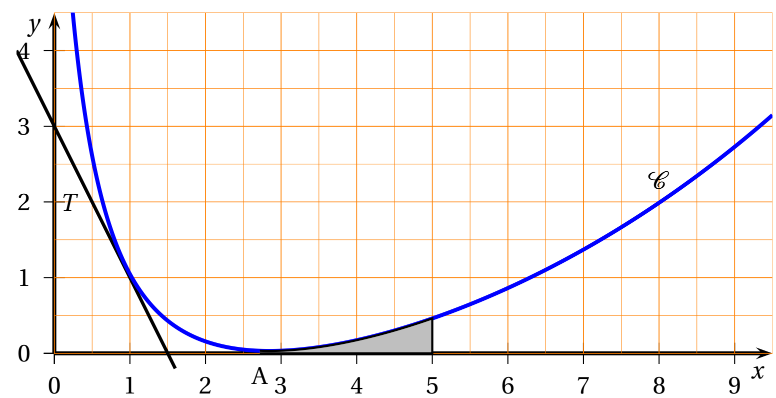
$$p(X=7)=\binom{10}{7}(0,855)^7(0,145)^3\approx 0,1222.$$

9. Calculons la probabilité qu'il réussisse au moins une série. L'évènement sera réalisé si l'évènement contraire ne l'est pas.

$$p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-(0,145)^{10}\approx 0,9999.$$

Exercice 2 QCM **4 points**

Ci dessous sont représentées la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
$\mathscr{C}$ est tangente à l'axe des abscisses au point A d'abscisse e.



Les réponses au QCM sont données en annexe A (à rendre avec la copie).

Exercice 3 **8 points**

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2(x-1)}.$$

1. Déterminons la limite de g en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2(x-1)}=0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2(x-1)}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$.
En $-\infty$, la courbe est asymptote à l'axe des abscisses.

2. Vérifions que pour tout réel x, $g(x)=\mathrm{e}^{x-1}\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-1}\right)$.

$\mathrm{e}^{2(x-1)}=\mathrm{e}^{(x-1)^2}=\mathrm{e}^{(x-1)}\times\mathrm{e}^{(x-1)}$. Par conséquent $g(x)=\mathrm{e}^{(x-1)}\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-1}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x-1}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{x-1})=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\mathrm{e}^{(x-1)}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$.

3. Déterminons la fonction dérivée g' de g.
$g'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{2}(2\mathrm{e}^{2(x-1)})=\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}^{2(x-1)}=\mathrm{e}^{x-1}\left(1-\mathrm{e}^{x-1}\right)$.

4. Démontrons que $1-\mathrm{e}^{x-1} \geqslant 0$ pour $x \leqslant 1$.

$$\begin{aligned} x &\leqslant 1\\ x-1 &\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{x-1} &\leqslant \mathrm{e}^0\\ \mathrm{e}^{x-1} &\leqslant 1\\ -\mathrm{e}^{x-1} &\geqslant -1\\ 1-\mathrm{e}^{x-1} &\geqslant 0 \end{aligned}$$

5. Déterminons le signe de $g'(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\quad \mathrm{e}^{x-1}>0$ par conséquent $g'(x)$ est du signe de $1-\mathrm{e}^{x-1}$.
Si $x<1,\quad 1-\mathrm{e}^{x-1}>0$ et si $x>1\quad 1-\mathrm{e}^{x-1}<0$
Déterminons les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
Si pour tout $x \in I\ f'(x)<0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
Pour tout $x \in]1\ ;\ +\infty[\quad g'(x)<0$ par conséquent g est strictement décroissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I,\ f'(x)\,0$ alors f est strictement croissante sur I.
Pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 1[,\quad 1-\mathrm{e}^{x-1}>0$ par conséquent g est strictement croissante sur cet intervalle.

6. Parmi les courbes données en annexe A (à rendre avec la copie), la courbe 2 est une représentation graphique de la fonction g.

7. Soit G la primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2(x-1)}.$$

$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = G(1)-G(0) = 1-\frac{1}{4}-\left(\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2}\right)=\frac{\mathrm{e}^{-2}-4\mathrm{e}^{-1}+3}{4}.$

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 2 : QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée sera zéro.

Cocher pour chaque question posée, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

1. $f'(1)$ est égal à :

☐ 1,5 ☐ 1
☐ 2 ☑ -2
c'est le coefficient directeur de T. Cette droite passe par(1 ; 1) et (0 ; 3)

2. L'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :

☐ $y = 3x + 1,5$ ☑ $y = -2x + 3$
☐ $y = x + 3$ ☐ $y = 2x + 3$
vérification de la question précédente.

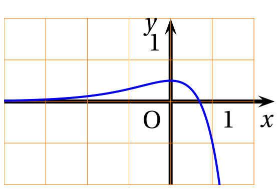
3. La valeur de $f(\mathrm{e})$ est :

☐ 0,5 ☐ e
☐ 1 ☑ 0
L'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e

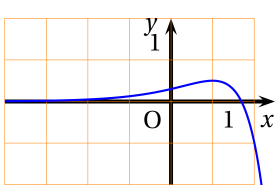
4. La valeur arrondie à 10^{-2} près de $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

☐ 1,30 ☐ 2,28
☑ 0,33 ☐ 5
C'est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équation $x = \mathrm{e}$ et $x = 5$.
L'aire de 4 carreaux est 1 cm^2. L'aire de la partie colorée est inférieure à la moitié.

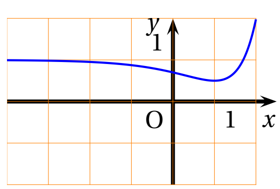
Exercice 3



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3