Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Nouvelle Calédonie novembre 2013 Correction

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, qu'il aura développée.

Exercice 1 : **4 points**

Dans cet exercice, les résultats des probabilités seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient 16 jetons identiques et indiscernables au toucher : 8 blancs, 6 rouges et 2 jaunes.

L'épreuve consiste à tirer simultanément 3 jetons de l'urne.

1. Justifions qu'il y a 560 tirages possibles. Nous avons à choisir 3 jetons parmi les 16, nous avons donc $\binom{16}{3}$ choix possibles soit $\dfrac{16\times 15\times 14}{3\times 2\times 1}=560$.
2. Calculons la probabilité des événements suivants :
   L'univers est l'ensemble des tirages possibles de trois jetons parmi les seize. La loi mise sur cet univers est la loi équirépartie. La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$ est définie par $p(A)=\frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$.

   A : « les trois jetons sont de couleurs différentes ».
   Comme il y a trois couleurs, il faut donc choisir un jeton de chaque couleur, il y a $\binom{8}{1}\times\binom{6}{1}\times\binom{2}{1}=8\times6\times2=96$ choix possibles. Par conséquent $p(A)=\dfrac{96}{560}=\dfrac{6}{35}$.
   B : « les trois jetons sont de la même couleur ».
   Les jetons ne peuvent être que blancs ou rouges, parmi les blancs, nous avons $\binom{8}{3}=56$ choix possibles, parmi les rouges $\binom{6}{3}=20$. Puisque les deux événements sont incompatibles, nous avons donc 76 choix possibles. $p(B)=\dfrac{76}{560}=\dfrac{19}{140}$.
   C : « au moins un des trois jetons est rouge ».
   L'événement contraire est : « aucun des jetons n'est rouge ». Calculons la probabilité de cet événement $\overline{C}$.
   Nous choisissons donc trois jetons parmi les dix qui ne sont pas rouges. Il y a $\binom{10}{3}=120$ choix possibles.
   $p(\overline{C})=\dfrac{120}{560}=\dfrac{3}{14}$. Par conséquent, $p(C)=1-\dfrac{3}{14}=\dfrac{11}{14}$.

Exercice 2 : **11 points**

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par : $f(x)=\ln(2x+1)-\mathrm{e}^{-x}+1$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unités graphiques 2 cm.

1. **a.** Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(2x+1)+\lim_{x\to+\infty}1-\mathrm{e}^{-x}=+\infty+(1-0)=+\infty.$$

   b. Déterminons la limite de f en $-\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\ln(2x+1)+\lim_{x\to-\frac{1}{2}}1-\mathrm{e}^{-x}=-\infty+(1-\mathrm{e}^{+\frac{1}{2}})=-\infty.$$

   La fonction n'est pas définie en $-\frac{1}{2}$ et admet en ce point une limite infinie, par conséquent la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** Déterminons l'expression de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$.

$$f'(x) = \dfrac{2}{2x+1} - (-\mathrm{e}^{-x}) = \dfrac{2}{2x+1} + \mathrm{e}^{-x}.$$

b. Déterminons le sens de variation de f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$, $f'(x)$ est strictement positif comme somme de deux termes strictement positifs.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Puisque $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$ par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$.

3. Déterminons une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
$f(0) = 0 \quad f'(0) = \dfrac{2}{2\times 0+1} + \mathrm{e}^0 = 2+1 = 3$
Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = 3(x-0)+0$, soit $y = 3x$.

4. **a.** Le tableau de valeurs est complété sur l'**annexe A (à rendre avec la copie)**.

b. La courbe $\mathcal{C}$, la tangente $\mathcal{T}$ et l'asymptote à $\mathcal{C}$ sont construites sur la feuille quadrillée .

5. Soit F la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$ par $F(x) = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ln(2x+1) + \mathrm{e}^{-x}$.

a. F est une primitive de f sur $\left]-\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$ si pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$ $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = 1\times\ln(2x+1) + \left(x+\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{2x+1} - \mathrm{e}^{-x} = \ln(2x+1) + 1 - \mathrm{e}^{-x} = f(x)$$

Par conséquent, F est une primitive de f sur cet intervalle.

b. Hachurons sur le graphique le domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{5}{2}$.

c. Calculons la valeur exacte de l'aire A de ce domaine, exprimée en unités d'aire.
Sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$, $f(x) \geqslant 0$, l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{5}{2}$ est $\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$A = \displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ln(2x+1) + \mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\frac{5}{2}} = 3\ln(6) + \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} - 1 \approx 4{,}457.$

d. L'unité d'aire vaut 4 cm^2. $4\times 4{,}457 = 17{,}828$
La valeur de A est d'environ 18 cm^2 .

Exercice 3 — 5 points

Une usine fabrique des toiles de pergola. Ces toiles peuvent présenter deux types de défauts :

- Un défaut de couleur de la toile ;
- un défaut d'étanchéité de la toile.

Sur un lot de 200 toiles, on obtient les résultats suivants :

	Présente un défaut d'étanchéité	Ne présente pas de défaut d'étanchéité	Total
Présente un défaut de couleur	8	8	16
Ne présente pas de défaut de couleur	4	180	184
Total	12	188	200

On admet que la répartition des deux types de défauts observée sur ce lot est identique en proportion à celle de l'ensemble de la production.

PARTIE A

On prélève une toile au hasard dans la production.

1. Calculons la probabilité que cette toile présente les deux défauts.

   L'univers est l'ensemble des tirages possibles d'une toile parmi les deux cents. La loi mise sur cet univers est la loi équirépartie. La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$ est définie par $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$.

   Il y a huit toiles qui présentent les deux défauts. La probabilité de cet événement que nous noterons A est

   $p(A) = \dfrac{8}{200} = \dfrac{1}{25}$

2. Sachant que la toile présente un défaut de couleur, calculons la probabilité qu'elle présente aussi un défaut d'étanchéité. Il y a 16 toiles présentant un défaut de couleur et parmi celles-ci 8 présentent un défaut d'étanchéité. La probabilité est donc de $\dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$.

PARTIE B

Le coût de fabrication d'une toile est de 100 €. Toutes les toiles sont garanties et en cas de défaut, cette garantie permet au client de faire réparer la toile aux frais du fabricant. Les frais de réparation sont les suivants :

- 50 € pour un défaut de couleur uniquement ;
- 70 € pour un défaut d'étanchéité uniquement ;
- 80 € pour les deux défauts.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque toile prélevée au hasard dans la production, associe son prix de revient, c'est-à-dire son coût de fabrication augmenté éventuellement des frais de réparation.

1. Précisons les valeurs prises par X.
   - 100 lorsque la toile n'a aucun défaut ;
   - 150 lorsque la toile a un défaut de couleur uniquement ;
   - 170 lorsque la toile a un défaut d'étanchéité uniquement ;
   - 180 lorsque la toile a les deux défauts.
2. Le tableau donné en **annexe A** a été complété en utilisant les résultats précédents.
3. Calculons la valeur exacte de l'espérance de X notée $E(X)$.

   $E(X) = 100 \times \dfrac{180}{200} + 150 \times \dfrac{8}{200} + 170 \times \dfrac{4}{200} + 180 \times \dfrac{8}{200} = 106{,}6$

   Cette valeur représente pour le fabricant le prix de revient moyen lors de la fabrication de 200 toiles.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2

4. a. Tableau de valeurs

x	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$-2,1$	$-1,3$	$-0,7$	0	1,7	2,5	2,9	3,2	3,4	3,6

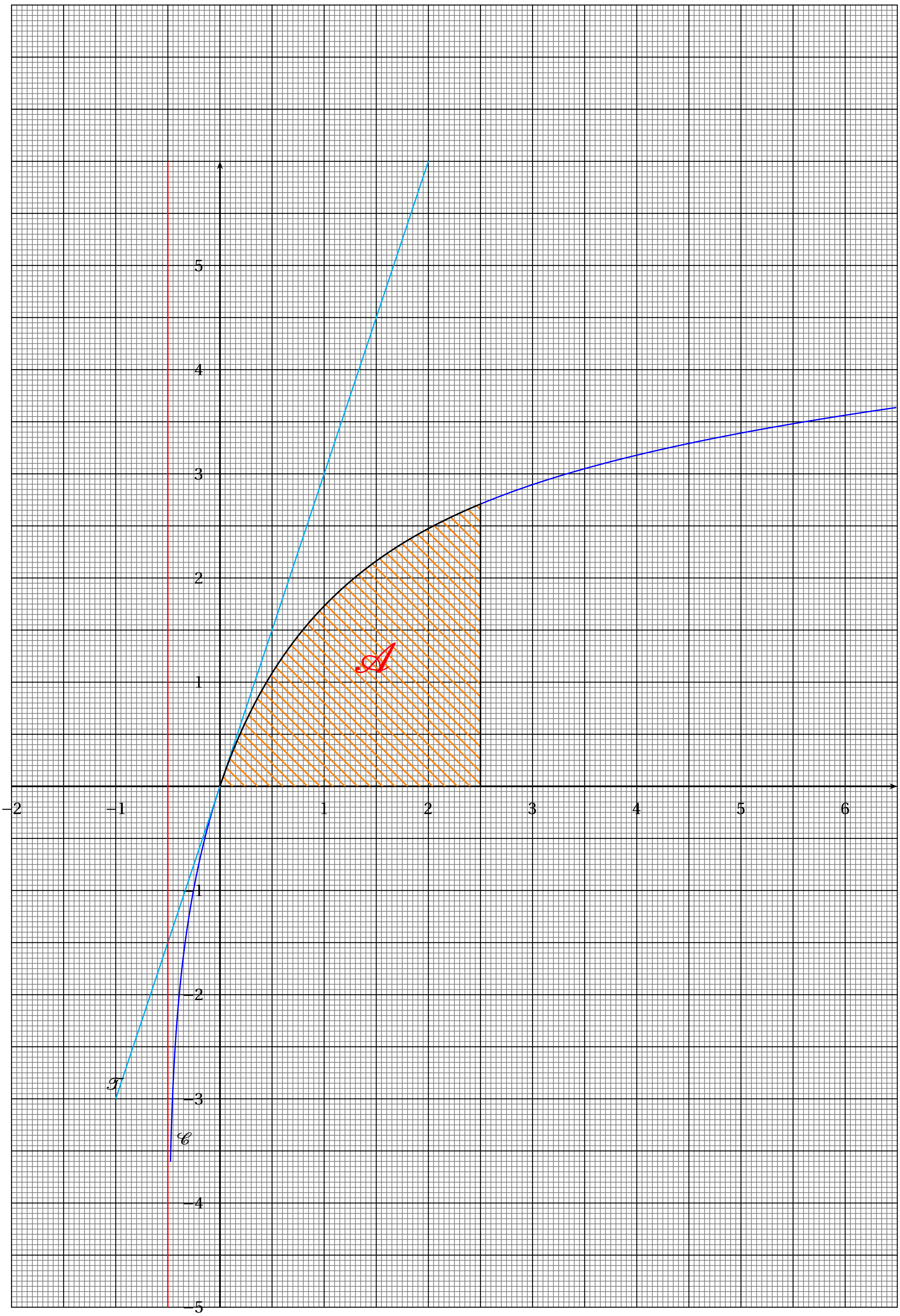
Les résultats sont arrondis à 10^{-1} *près.*

EXERCICE 3 PARTIE B

2. Loi de probabilité de X

x_i	100	150	170	180
$P(X_i)$	$\dfrac{180}{200}$	$\dfrac{8}{200}$	$\dfrac{4}{200}$	$\dfrac{8}{200}$

Les probabilités sont données sous la forme de fractions dont le dénominateur est égal à 200.



5
4
3
2
1
−2
−1
1
2
3
4
5
6
−1
−2
−3
−4
−5
$\mathscr{A}$
$\mathscr{T}$
$\mathscr{C}$