Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Polynésie juin 2010 Correction

Exercice 1 **6 points**

La fabrication des CD nécessite une grande quantité de ressources naturelles et génère beaucoup de déchets. Afin de sensibiliser un lycée à ce problème, une enquête a été réalisée auprès des 750 personnes de ce lycée (élèves et agents) pour savoir s'ils utilisaient complètement leurs CD :

- 80 % des personnes du lycée sont des élèves ;
- 95 % des élèves gravent complètement leurs CD ;
- 50 agents ne gravent pas complètement leurs CD.

1. Dressons le tableau représentant cette situation.

	Élèves	Agents	Total
Gravent complètement leurs CD	570	100	670
Ne gravent pas complètement leurs CD	30	50	80
Total	600	150	750

2. On choisit une personne au hasard dans le lycée L'univers est l'ensemble des personnes du lycée et la loi mise sur cet univers est la loi équirépartie. Pour un évènement A : $p(\text{A}) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

On considère les évènements :

E : « La personne choisie est un élève » ;

G : « La personne choisie grave complètement ses CD ».

Les probabilités demandées seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

a. Déterminons la probabilité que la personne choisie soit un élève qui grave complètement ses CD. Calculons $p(\text{E} \cap \text{G})$. Il y a 570 élèves qui gravent complètement leurs CD. Par conséquent

$$p(\text{E} \cap \text{G}) = \frac{570}{750} = \frac{19}{25}.$$

b. Déterminons la probabilité que la personne choisie soit un élève sachant qu'elle grave complètement ses CD. Calculons $p_{\text{G}}(\text{E})$.

$$p_{\text{G}}(\text{E}) = \frac{p(\text{E} \cap \text{G})}{p(\text{G})} = \frac{\frac{19}{25}}{\frac{670}{750}} = \frac{19}{25} \times \frac{75}{67} = \frac{57}{67}$$

c. Les évènements E et G sont indépendants si $p(\text{E} \cap \text{G}) = p(\text{E}) \times p(\text{G})$.

$$p(\text{E} \cap \text{G}) = \frac{19}{25} \qquad p(\text{E}) \times p(\text{G}) = \frac{600}{750} \times \frac{67}{75} = \frac{268}{375}.$$

Il en résulte que les évènements E et G ne sont pas indépendants.

Exercice 2 **8 points**

Soit la fonction numérique f, définie sur l'intervalle $\text{I} = \left]-\dfrac{2}{3}\,;\,5\right]$ par :

$$f(x) = -x + 8 + 2\ln(3x + 2)$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphiques :

- 3 cm pour une unité pour l'axe des abscisses ;
- 1 cm pour une unité pour l'axe des ordonnées.

1. **a.** Calculons la limite de f en $-\dfrac{2}{3}$.

$$\lim_{x \to -\frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{2}{3}} -x+8+\lim_{x \to -\frac{2}{3}} 2\ln(3x+2) = \frac{26}{3}+(-\infty) = -\infty.$$

En effet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$

b. La droite d'équation $x = -\dfrac{2}{3}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Déterminons la fonction dérivée de f.

$$f'(x) = -1+2\times\frac{3}{3x+2} = \frac{-(3x+2)+6}{3x+2} = \frac{-3x+4}{3x+2}$$

Nous avons bien obtenu $f'(x) = \dfrac{-3x+4}{3x+2}$ pour tout x de l'intervalle I.

3. **a.** $f'(x)$ est du signe de $(-3x+4)$ sur I. En effet sur $\left]-\dfrac{2}{3}\ ;\ 5\right]$ $\quad 3x+2>0$

b. $-3x+4>0$ si et seulement si $x<\frac{4}{3}$.
par conséquent si $-\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$, $\quad f'(x)>0$ et si $x>\frac{4}{3}$, $\quad f'(x)<0$.

c. Si pour tout $x\in$ I, $f'(x)>0$ alors f est strictement croissante sur I.
$f'(x)>0$ sur $\left]-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right[$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x\in$ I, $f'(x)<0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
$f'(x)<0$ sur $\left]\frac{4}{3}\ ;\ 5\right]$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variations de f sur $\left]-\frac{2}{3}\ ;\ 5\right]$.

x	$-\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$		5
f'		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{20}{3}+2\ln 6$	$\searrow$	$3+2\ln 17$

$f\left(\dfrac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}+8+2\ln(4+2) = \frac{20}{3}+2\ln 6,$
$f(5) = -5+8+2\ln(3\times 5+2) = 3+2\ln 17.$

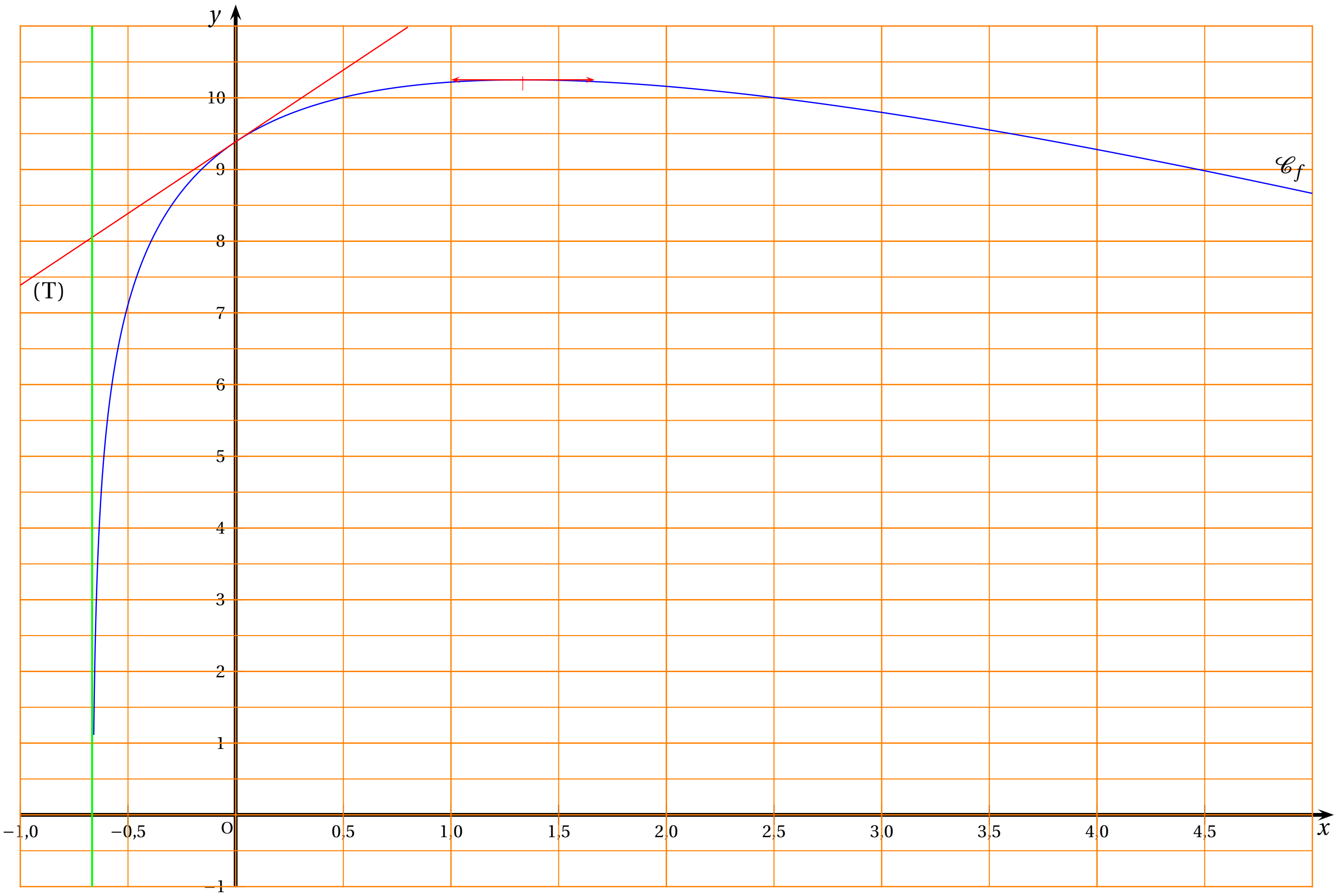
4. Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
$f(0) = 8+2\ln 2 \quad f'(0) = 2.$
Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = 2x+8+2\ln 2$.

5.

x	$-0,65$	$-0,5$	0	1	$\frac{4}{3}$	2	3	4	5
$f(x)$	2,7	9,4	10,0	10,2	10,3	10,2	9,8	9,3	8,7

Les résultats sont arrondis à 10^{-1} près

6. $\mathscr{C}_f$ et (T) sont tracées ci-dessous.



Exercice 3 : VRAI-FAUX **6 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquons si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant la réponse.

Proposition 1 : $\dfrac{4}{3}$ est solution de l'équation $\mathrm{e}^{-3x+4} = 1$. **Vraie**

En remplaçant x par $\frac{4}{3}$ dans $-3x+4$, nous obtenons 0 et $\mathrm{e}^0 = 1$

Proposition 2 : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x+1} = -\infty$. **Fausse**

Lorsque x tend vers $+\infty$, $-3x+1$ tend vers $-\infty$ or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Proposition 3 : $x^2 + x < 0$ pour tout $x \in]-1\,;\,0[$. **Vraie**

Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ pour $x \in]x_1\,;\,x_2[$, nous avons $a = 1$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 0$.

Proposition 4 : $\ln(72) = 3\ln 2 + 2\ln 3$. **Vraie**

$72 = 2^3 \times 3^2$ par conséquent $\ln 72 = \ln(2^3 \times 3^2) = \ln 2^3 + \ln 3^2 = 3\ln 2 + 2\ln 3$.

Proposition 5 : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-x)\mathrm{e}^{-x}$. **Vraie**

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ si $\mathrm{F}' = f$.

$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{e}^{-x} + (x-2)(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(1-(x-2)) = (3-x)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.

Proposition 6 : $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(2\mathrm{e}^x + x^2\right)\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{3}$. **Fausse**

$$\int_{-1}^{0} \left(2\mathrm{e}^x + x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[2\mathrm{e}^x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 2 - 2\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{3} = -2\mathrm{e}^{-1} + \frac{7}{3}$$