# ∽ Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant ∾
# Métropole, Antilles–Guyane, La Réunion juin 2011
Correction

**Exercice 1** **4 points**

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier vos réponses. Une réponse exacte non justifiée ne rapporte pas de point.

**1.** On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ :

| $x_i$ | $-6$ | $-4$ | $-1$ | $2$ | $5$ | $12$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\dfrac{3}{10}$ | $\dfrac{1}{10}$ | $\dfrac{1}{5}$ | $\dfrac{1}{10}$ | $\dfrac{1}{5}$ | $\dfrac{1}{10}$ |

Proposition 1 : $\text{E}(X) = 0$ **Vrai**

$$\text{E}(x) = -6\times 0{,}3 - 4\times 0{,}1 - 1\times 0{,}2 + 2\times 0{,}1 + 5\times 0{,}2 + 12\times 0{,}1 = 0$$

**2.** A et B sont deux événements tels que : $p(\text{A}) = 0,7 \quad p(\text{B}) = 0,4 \quad p(\text{A}\cap\text{B}) = 0,2$.

Proposition 2 : Les événements A et B sont indépendants **Faux**

car $p(\text{A}\cap\text{B}) \neq p(\text{A})\times p(\text{B})$

Proposition 3 : $p(\text{A}\cup\text{B}) = 0,9$. **Vrai**

$$p(\text{A}\cup\text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A}\cap\text{B}).p(\text{A}\cup\text{B}) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}2.$$

Proposition 4 : $p\left(\text{A}\cap\overline{\text{B}}\right) = 0,5$. **Vrai**

$\text{A}\cap\overline{\text{B}}$ et $\text{A}\cap\text{B}$ forment une partition de A.

donc $p(\text{A}) = p(\text{A}\cap\text{B}) + p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) \quad p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5$.

**Exercice 2** **12 points**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x-1) - \frac{1}{x-1}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

**1.** Déterminons la limite de $f$ quand $x$ tend vers 1.

$$\lim_{x\to 1} \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln(x-1) = -\infty \quad \lim_{x\to 1} -\frac{1}{x-1} = -\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\frac{1}{x} = -\infty$

**2.** Déterminons la limite de $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x-1) = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x-1} = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$

**3.** **a.** Déterminons $f'$ fonction dérivée de $f$.

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{x-1+1}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2}$$

pour tout $x$ de l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

**b.** $x > 1$ par conséquent $x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$. Il en résulte $f'(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$.

**c.** Dressons le tableau de variations de $f$ sur $]-1~;~5]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction $f$ est strictement croissante sur $I$.
$f'(x) > 0$ pour $x \in ]1~;~+\infty]$ donc $f$ est strictement croissante sur cet intervalle.

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | |
| Variations de $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**4.** Déterminons une équation de la tangente $T$ au point d'abscisse 2.
L'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$ est
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$. $f(2) = -1 \quad f'(2) = \frac{2}{(2-1)^2} = 2$
Une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est $y = 2(x-2)-1$, soit $y = 2x-5$.

**5.** **a.** Le tableau de valeurs est complété sur l'annexe A.

**b.** Traçons la tangente $T$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal. Voir à la fin.

**6.** On considère la fonction $F$ définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = (x-2)\ln(x-1) - x.$$

**a.** $F$ est une primitive de $f$ sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ si $F' = f$.

$$F'(x) = \ln(x-1) + \frac{x-2}{x-1} - 1 = \ln(x-1) + \frac{x-2-(x-1)}{x-1} = \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} = f(x)$$

**b.** $f(3) = \ln(2) - \frac{1}{2}$. $f(3) > 0$ car $\ln(2) > \frac{1}{2}$ et nous avons montré que $f$ est strictement croissante sur $]1~;~+\infty[$ a fortiori sur $[3~;~5]$ par conséquent pour tout $x$ de l'intervalle $[3;5]$ nous avons $f(x) \geqslant 0$.

**c.** $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(3) = 3\ln(4) - 5 - (\ln 2 - 3) = 3 \times 2\ln 2 - 5 - \ln 2 + 3 = 5\ln(2) - 2.$
Puisque pour tout $x \in [3~;~5]$, $f(x) \geqslant 0$, nous pouvons interpréter ce résultat comme l'aire(en unités d'aire) de la partie de plan délimité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$.

**Exercice 3** **4 points**

Un internaute a installé sur son ordinateur un nouveau logiciel qui permet de filtrer les messages sur sa messagerie électronique. Des tests sur l'efficacité de ce logiciel ont conduit aux résultats suivants :

– 70 % des messages reçus sont indésirables ;
– 95 % des messages indésirables sont éliminés ;
– 2 % des messages non indésirables sont éliminés.

L'internaute reçoit un message.
On note :

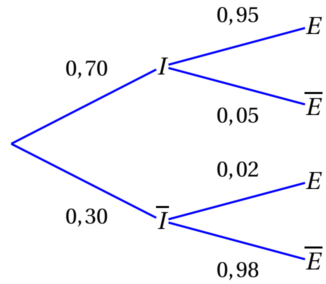
I : l'événement « le message est indésirable ».

E : l'événement « le message est éliminé ».

*Les probabilités seront arrondies à* $10^{-3}$ *près si nécessaire.*

**1.** 70 % des messages reçus sont indésirables $p(\mathrm{I}) = 0{,}7$
et 95 % des messages indésirables sont éliminés $p_{\mathrm{I}}(\mathrm{E}) = 0{,}95$.

**2.** Dessinons l'arbre de probabilités correspondant à la situation.




**3.** Calculons les probabilités des événements suivants :

**a.** « Le message est indésirable et éliminé ». $p(\text{I} \cap \text{E}) = 0{,}70 \times 0{,}95 = 0{,}665$

**b.** « Le message est éliminé ».

$$p(\text{I}) = p(\text{I} \cap \text{E}) + p(\overline{\text{I}} \cap \text{E}) = 0{,}665 + 0{,}30 \times 0{,}02 = 0{,}671$$

**4.** Le message est éliminé. La probabilité qu'il soit indésirable est

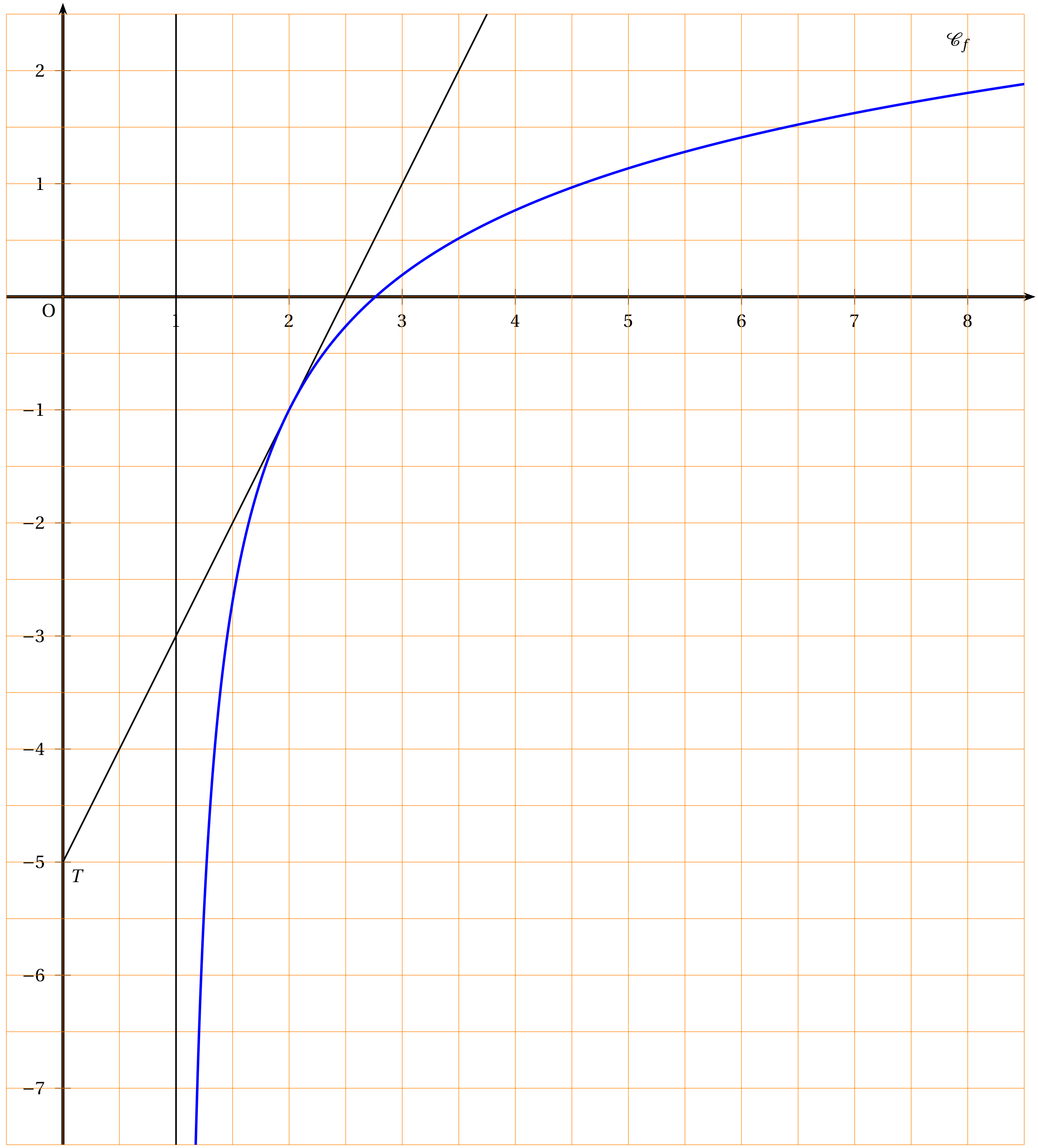
$$p_{\text{E}}(\text{I}) = \frac{p(\text{I} \cap \text{E})}{p(\text{E})} = \frac{0{,}665}{0{,}671} = 0{,}991$$

**ANNEXE A**

**Exercice 2 :**

| $x$ | 1,2 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-6{,}6$ | $-2{,}7$ | $-1$ | 0,2 | 0,8 | 1,1 | 1,4 |

*Les résultats sont arrondis à* $10^{-1}$ *près.*


$\mathscr{C}_f$
$T$
O
1
2
3
4
5
6
7
8
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7