∽ Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant ∾
Métropole, Antilles–Guyane, La Réunion juin 2009 correction

Exercice 1 **6,5 points**

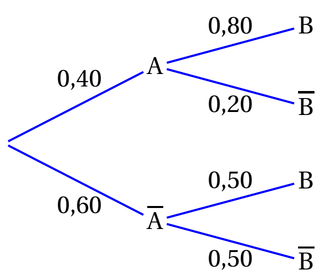
Tous les résultats seront arrondis au centième près, si nécessaire

Une auto-école propose deux filières possibles pour préparer l'examen du permis de conduire : l'apprentissage anticipé de la conduite (AAC) et la filière traditionnelle.
Elle affiche les résultats suivants :

- 40 % de ses candidats choisissent la formule AAC ;
- 80 % des candidats qui choisissent la formule AAC obtiennent leur permis lors de la première présentation ;
- 50 % des candidats qui préparent leur permis avec la filière traditionnelle l'obtiennent lors de la première présentation.

On interroge au hasard un de ses candidats après l'obtention du résultat de sa première présentation.
On note A l'évènement : « Le candidat a préparé son examen avec la filière AAC ».
On note B l'évènement : « Le candidat a obtenu son permis de conduire lors de la première présentation ».

1. Construisons l'arbre de probabilités illustrant la situation en indiquant les probabilités sur chaque branche.



2. Calculons la probabilité de l'évènement : « Le candidat a préparé le permis de conduire avec la filière AAC et l'a obtenu lors de la première présentation », c'est-‡-dire calculons $p(\text{A} \cap \text{B})$.

$$p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{B}) = 0{,}40 \times 0{,}80 = 0{,}32.$$

3. Montrons que la probabilité que le candidat ait obtenu son permis de conduire lors de la première présentation est de $0,62$.

$$p(\text{B}) = p(\text{A} \cap \text{B}) + p(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = 0{,}32 + 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}62.$$

4. Le candidat interrogé a échoué au permis de conduire lors de la première présentation. Calculons la probabilité qu'il ait préparé l'examen avec la filière AAC.

$$p_{\overline{\text{B}}}(\text{A}) = \frac{p\left(\text{A} \cap \overline{\text{B}}\right)}{p(\overline{\text{B}})} = \frac{0{,}4 \times 0{,}2}{1 - 0{,}62} \approx 0{,}21.$$

On interroge au hasard et de façon indépendante 10 candidats de cette auto-école qui viennent de passer leur permis de conduire pour la première fois. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant échoué.

5. La loi de probabilité de X est une loi binomiale s'il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$.

Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,38). Il s'agit de la répétition d'une expérience aléatoire ‡ deux résultats (échec, réussite) de 10 séries indépendantes. La probabilité d'échouer est 0,38 car la probabilité de réussir lors de la première présentation est 0,62. Nous avons par conséquent $p(X = k) = \binom{10}{k}(0{,}38)^k(0{,}62)^{10-k}$.

6. Calculons la probabilité d'interroger au moins un candidat ayant échoué.

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (0{,}62)^{10} \approx 0{,}99$$

Exercice 2 QCM **5 points**

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-5~;~+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Le tableau de variations de f est donné ci-dessous.

x	-5		0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$3-\ln\left(\frac{1}{3}\right)$	↘	$-\infty$

Le **QCM** est donné **en annexe**.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

Exercice 3 **8,5 points**

Soit g la fonction définie sur $]-3~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{x+3}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques :

- 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses,
- 0,5 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Déterminons la limite en $+\infty$ de g.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} + \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x+3} = +\infty + 0 = +\infty.$$

b. Déterminons la limite en -3 de g

$$\lim_{x\to-3} g(x) = \lim_{x\to-3} \mathrm{e}^{2x} + \lim_{x\to-3} -\frac{3}{x+3} = \mathrm{e}^{-6} - \infty = -\infty.$$

Par conséquent, la droite d'équation $x = -3$ est asymptote ‡ la courbe représentative de g.

2. **a.** Déterminons $g'(x)$ pour tout x de $]-3~;~+\infty[$. $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{3}{(x+3)^2}$.

b. $g'(x) > 0$ sur $]-3~;~+\infty[$ comme somme de réels strictement positifs.

c. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
$g'(x) > 0$ sur $]-3~;~+\infty[$ par conséquent g est strictement croissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variations de g sur $]-3~;~+\infty[$.

x	-3		$+\infty$
g'	‖	$+$	
Variations de g	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

d. Déterminons une équation de la tangente (T) ‡ la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.
L'équation de la tangente ‡ la courbe représentative de f au point d'abscisse a est
$y = f'(a)(x-a)+f(a)$. $g(0) = 0 \quad g'(0) = 2+\frac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$.

Une équation de la tangente T ‡ $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 est $y = \dfrac{7}{3}x$.

3. **a.** Le tableau de valeurs est complété en annexe.

b. $\mathscr{C}_g$ et (T) sont construites dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$ci-dessous.

4. **a.** La fonction G définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par

$$G(x) = \frac{1}{2}\text{e}^{2x} - 3\ln(x+3)$$

est une primitive de g si $G'(x) = g(x)$.

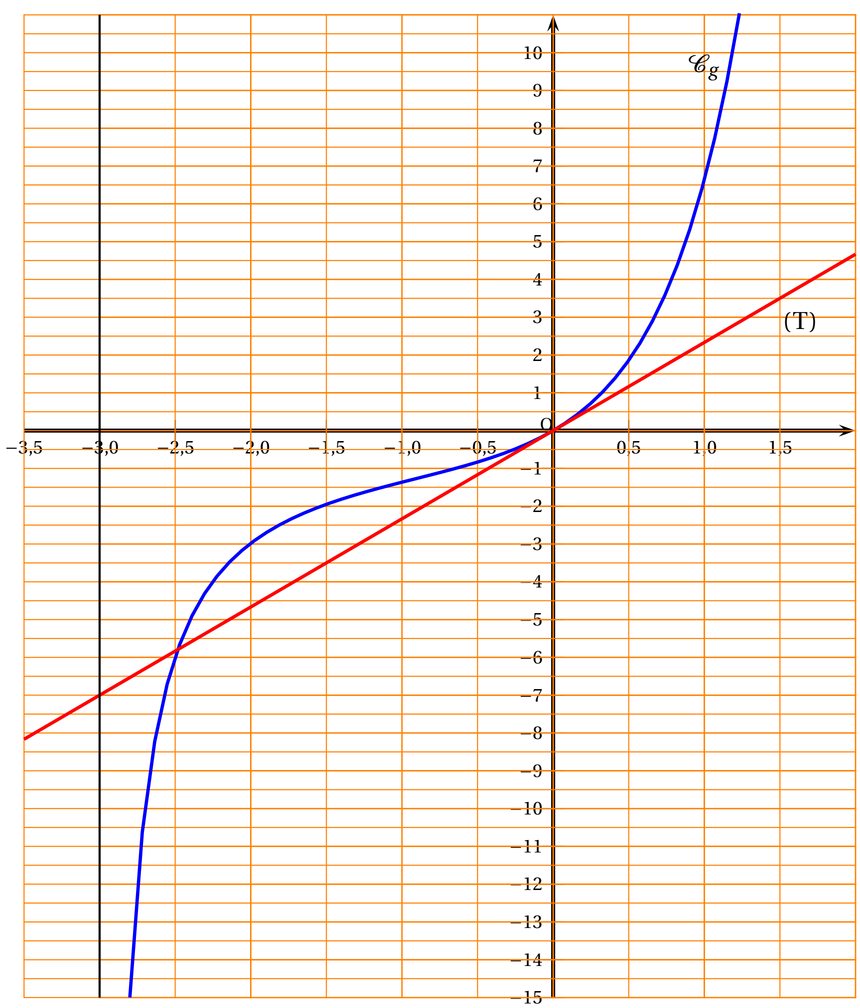
$$G'(x) = \frac{1}{2}(2\text{e}^{2x}) - 3\frac{1}{x+3} = \text{e}^{2x} - \frac{3}{x+3} = g(x)$$

b. Calculons I.

$$I = \int_0^4 g(x)\,\text{d}x = G(4)-G(0) = \frac{1}{2}\text{e}^8 - 3\ln 7 - \left(\frac{1}{2} - 3\ln 3\right) = \frac{1}{2}\text{e}^8 + 3\ln\frac{3}{7} - \frac{1}{2}$$

.

c. I est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.



Exercice 3

x	$-2,7$	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$
$g(x)$	$-10,0$	$-6,0$	$-3,0$	$-2,0$	$-1,4$	$-0,8$	0	$1,9$	$6,6$	$19,4$

Les résultats sont arrondis ‡ 0,1 près

ANNEXE (‡ compléter et ‡ remettre avec la copie)

Exercice 2 QCM

Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée ‡ cette partie sera zéro.*
Cocher pour chaque question posée, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

1. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f passe par le point :

   ☐ A$(-5 ; 0)$ ☐ B$(2 ; 0)$ ☑ C$(2 ; 3+\ln 3)$

2. $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation :

   ☑ $x=-5$ ☐ $y=-5$ ☐ On ne peut pas savoir

3. $f(x) \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle :

   ☐ $[2 ; +\infty[$ ☐ $]-5 ; 0]$ ☑ On ne peut pas savoir

4. L'équation $f'(x)=0$ admet pour solution(s) :

   ☑ 0 et 2 ☐ 0 et $3-\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ ☐ -5

5. $f'(4)$ est :

   ☐ positif ☑ négatif ☐ On ne peut pas savoir