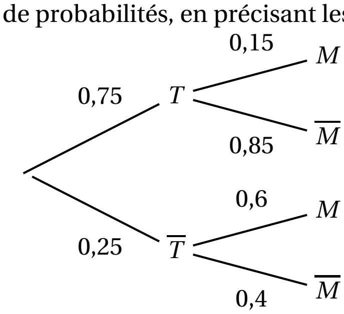
Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole–Antilles–Guyane–Réunion septembre 2012 correction

Exercice 1 5,5 points

Le mildiou est une maladie qui affecte différents types de végétaux que l'on peut traiter avec de la bouillie bordelaise.
Des études effectuées dans une région ont permis d'estimer que parmi les pieds de tomates non traités, 60 % sont atteints par cette maladie.
Parmi ceux qui sont traités, des tests d'efficacité ont montré que 85 % ne sont pas atteints par cette maladie. Sur une parcelle de culture située dans cette région, 25 % des pieds de tomates n'ont pas pu être traités contre cette maladie.
On prélève un pied de tomates au hasard dans cette parcelle.
On considère les événements suivants :
T : « Le pied de tomates a été traité »
M : « Le pied de tomates est atteint par le mildiou »
Dans tout l'exercice, les probabilités demandées seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-4} près.

1. Décrivons la situation à l'aide d'un arbre de probabilités, en précisant les probabilités sur chacune des branches.



2. L'événement $T \cap M$ est l'événement : « Le pied de tomates a été traité et il est atteint par le mildiou ».
   $P(T \cap M) = P(T) \times P_T(M) = 0,75 \times 0,15 = 0,1125$.
3. Calculons la probabilité de l'événement : « Le pied de tomates n'a pas été traité et il est atteint par le mildiou ».
   $P(\overline{T} \cap M) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(M) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.
4. Calculons la probabilité d'avoir un pied de tomates atteint par le mildiou.

$$P(M) = P(T) \times P_T(M) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(M) = 0,1125 + 0,15 = 0,2625$$

   La probabilité est bien de 0,262 5.
5. Sachant que le pied de tomates est atteint par la maladie, la probabilité qu'il n'ait pas été traité est notée $P_M(\overline{T})$.
   $P_M(\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T} \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0,15}{0,2625} \approx 0,5714$.

Exercice 2 : (4 points)

En **annexe A (à rendre avec la copie)**, vous trouverez les questions portant sur la fonction g définie sur $\mathbb{R}$,
dont on donne le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de g	0	↗	e	↘	-2	↗	$+\infty$

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie sera zéro.

Aucune justification n'est demandée.

Pour chacune des questions suivantes, l'affirmation exacte est cochée.

1. L'équation $g(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$

   ☑ trois solutions ☐ deux solutions ☐ une solution

   Sur chaque intervalle, la fonction est strictement monotone et 1 appartient à l'ensemble image

2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \leqslant 0$ est

☐ $]-\infty\ ;\ -1]$ ☐ $[-1\ ;\ 1]$ ☑ on ne sait pas

3. La courbe $\mathscr{C}$ représentative de g admet une asymptote d'équation

☐ x = 0 ☑ y = 0 ☐ y = e

on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe.

4. ☐ $g(-2) < g(1)$ ☐ $g(0) < g(0,5)$ ☑ $g(2) < g(3)$

Sur $[1\ ;\ +\infty[$, g est strictement croissante, $2 < 3$ donc $g(2) < g(3)$

Exercice 3 : (10,5 points)

La courbe $\mathscr{C}$ donnée dans le **document 1** est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$.
La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Partie A

Par lecture graphique :

1. L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions car la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

2. $f'(0) = 0$. Le nombre dérivé de f en 0 est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0. En ce point la tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc le coefficient directeur est nul.

3. Déterminons le sens de variation de f sur $\left[0\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$. Sur cet intervalle, f est décroissante, la courbe « descend ».

Partie B

On admet que la fonction f de la partie A est définie sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x + \dfrac{9}{2}$

1. Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right) + \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{9}{2}\right) = -\infty$

en effet $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{9}{2}\right) = -\infty$

2. Calculons $f'(x)$ pour tout x de $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}(2\mathrm{e}^{2x}) + 1 = -\mathrm{e}^{2x} + 1$

3. **a.** Résolvons dans $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$ l'inéquation $-\mathrm{e}^{2x} + 1 \geqslant 0$.

$-\mathrm{e}^{2x} + 1 \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \mathrm{e}^{2x} \iff \mathrm{e}^{0} \geqslant \mathrm{e}^{2x} \iff 0 \geqslant 2x \iff x \leqslant 0$

Par conséquent l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty\ ;\ 0]$.

b. Dressons le tableau de variation de f sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Pour $x \in \left]0\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$, $f'(x) < 0$, par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.

Pour $x \in \mathbb{R}_-$, $f'(x) \leqslant 0$, par conséquent f est croissante sur cet intervalle.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{\mathrm{e}^3}{2} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{2} = -\dfrac{\mathrm{e}^3}{2} + 6.$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$
f'		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$6-\frac{e^3}{2}$

4. Déterminons une primitive F de f sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}\right]$.

$F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right) + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{9}{2}x + \lambda = \dfrac{-\mathrm{e}^{2x} + 2x^2 + 18x}{4} + \lambda$ o˘ $\lambda \in \mathbb{R}$

5. **a.** Calculons la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{I} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{-\mathrm{e}^2 + 2 + 18}{4} - (\frac{-\mathrm{e}^0}{4}) = \frac{-\mathrm{e}^2 + 21}{4}$$

b. Sur $[0\,;\,1]$, f est une fonction positive. I peut donc s'interpréter comme l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

Document 1