Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Nouvelle–Calédonie novembre 2009 Correction

Exercice 1 **4 points**

La probabilité qu'un tireur à l'arc atteigne sa cible est égale à $\frac{3}{4}$.
Le tireur effectue 12 lancers successifs et indépendants.
X est la variable aléatoire égale au nombre de fois où le tireur atteint sa cible.

Les réponses au QCM sont données en annexe A.

Exercice 2 **5 points**

Dans une kermesse, un jeu est organisé. Le joueur réalise un tirage en deux étapes.

1re étape :

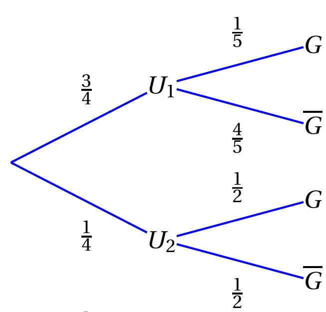
Le joueur tire au hasard un billet dans un sac. Dans ce sac, on a placé 4 billets indiscernables au toucher :
3 billets sont marqués « U_1 » et 1 billet est marqué « U_2 ».

2e étape :

- Si le joueur a obtenu un billet marqué « U_1 », il tire alors un jeton dans une urne U_1. Dans cette urne sont placés 10 jetons : 8 jetons sont marqués « perdant » et 2 jetons sont marqués « gagnant ».
- Si le joueur a obtenu le billet marqué « U_2 », il tire alors un jeton dans une urne U_2.

Dans cette urne sont placés 10 jetons :
5 jetons sont marqués « perdant » et 5 jetons sont marqués « gagnant ».
On note U_1 l'événement « le joueur a tiré un billet U_1 ».
On note U_2 l'événement « le joueur a tiré un billet U_2 ».
On note G l'événement « le joueur a tiré un jeton marqué « gagnant ».
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près si nécessaire.

1. Construisons un arbre de probabilités décrivant cette situation en précisant les probabilités sur chaque branche.



2. Calculons la probabilité de l'événement $U_1 \cap G$.

$$p(U_1 \cap G) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

Calculons maintenant, la probabilité de l'événement $U_2 \cap G$.

$$p(U_2 \cap G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

3. Déterminons la probabilité de l'événement G.

$$p(G) = p(U_1 \cap G) + p(U_2 \cap G) = \frac{3}{20} + \frac{1}{8} = \frac{11}{40} = 0{,}275$$

4. Sachant que le joueur a gagné, la probabilité que son billet gagnant soit tiré de l'urne U_1 est $p_G(U_1)$.

$$p_G(U_1) = \frac{p(G \cap U_1)}{p(G)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{11}{40}} = \frac{3}{20} \times \frac{40}{11} = \frac{6}{11} \approx 0{,}545$$

Exercice 3 **11 points**

Partie A

La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée en annexe B est la représentation graphique de la fonction f définie sur I =]2 ; 10] par

$$f(x) = a\ln(x-2) - x + b \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

La droite (T), tangente à la courbe au point A d'abscisse 8, est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminons graphiquement :

a. $f(3)$**.** Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3. Il en résulte $f(3) = -1$.

b. $f'(8)$**.** Au point de la courbe d'abscisse 8, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est nul. Le nombre dérivé en a est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative de f, par conséquent $f'(8) = 0$.

2. Calculons $f'(x)$ pour tout x de]2 ; 10].

$$f'(x) = a\frac{1}{x-2} - 1 = \frac{a}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} = \frac{a+2-x}{x-2}$$

3. Déterminons les réels a et b.

$$\begin{cases} f(3) = a\ln(3-2) - 3 + b \\ f'(8) = \dfrac{a+2-8}{x-2} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} -3+b = -1 \\ \dfrac{a-6}{6} = 0 \end{cases} \quad \text{par conséquent} \quad \begin{cases} b = 2 \\ a = 6 \end{cases}$$

Il en résulte $f(x) = 6\ln(x-2) - x + 2$.

Partie B

On admet que f est la fonction définie sur I =]2 ; 10] par

$$f(x) = 6\ln(x-2) - x + 2.$$

1. a. Déterminer la limite de f en 2.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 4\ln(x-2) + \lim_{x\to 2} -x+2 = (-\infty) + (0) = -\infty.$$

car $\lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$.

b. Par conséquent, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe représentative de f.

2. a. Déterminons la fonction dérivée de f, pour tout $x \in I$.

$$f'(x) = 6\frac{1}{x-2} - 1 = \frac{6}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} = \frac{8-x}{x-2}.$$

remarque

Puisque la fonction f est celle de la Partie A avec $a = 6$ et $b = 2$, en remplaçant par ces valeurs dans le calcul précédent de $f'(x)$, nous avons bien $f'(x) = \frac{8-x}{x-2}$ pour tout x de I.

b. Pour tout $x \in I$, $x - 2 > 0$ par conséquent $f'(x)$ est du signe de $(8-x)$ sur I.
Dans $\mathbb{R}$, $8 - x > 0$ si et seulement si $x < 8$.
par conséquent si $2 < x < 8$, $f'(x) > 0$ et si $8 < x \leqslant 10$, $f'(x) < 0$.

c. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
$f'(x) > 0$ sur]2 ; 8[par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
$f'(x) < 0$ sur]8 ; 10] par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variations de f sur]2 ; 10] .

x	2		8		10
f'		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$6\ln 6-6$	$\searrow$	$18\ln 2-8$

$f(8)=6\ln(8-2)-8+2=6\ln 6-6$.
$f(10)=6\ln(10-2)-10+2=6\ln 8-8=18\ln 2-8$.

3. Déterminons une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
$f(3)=6\ln(3-2)-3+2=-1 \quad f'(0)=\frac{8-3}{(3-2)}=5$.
Une équation de la tangente (T_1) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 est $y=5(x-3)-1$ ou en simplifiant $y=5x-16$.

4. (T_1) et l'asymptote $x=2$ sont tracées dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}_f$ donnée en annexe B.

5. a. Soit F la fonction définie sur I par :

$$F(x)=6(x-2)\ln(x-2)-\frac{1}{2}x^2-4x$$

F est une primitive de f sur I si $F'=f$. Déterminons la dérivée de F.

$$F'(x)=6(1)\ln(x-2)+6\cancel{(x-2)}\times\frac{1}{\cancel{x-2}}-\frac{1}{2}(2x)-4=6\ln(x-2)-x+2=f(x)$$

b. Calculons la valeur exacte, puis une valeur arrondie à 10^{-2} près de $\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_4^8=F(8)-F(4)=36\ln 6-32-32-(12\ln 2-8-16)=36\ln 6-12\ln 2-40=12\ln 108-40.$$

remarque $36\ln 6-12\ln 2=12(3\ln 6-\ln 2)=12\ln\frac{6^3}{2}=12\ln 108$.
$\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x\approx 16{,}19$.

f étant continue et positive sur $[4~;~8]$, $\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=4$ et $x=8$.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 1 : QCM

Cocher pour chaque question posée, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

1. La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres n et p avec :

☑ $n = 12$ et $p = \dfrac{3}{4}$ ☐ $n = \dfrac{1}{4}$ et $p = 12$

2. La probabilité que le tireur atteigne 9 fois la cible, arrondie à 10^{-4} près, est :

☐ 0,031 7 ☐ 0,000 4
☑ 0,258 1 ☐ 0,075 1

$p(\text{X} = 9) = \begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^9\right)\left(\left(\frac{1}{4}\right)^3\right)$.

3. La probabilité que le tireur atteigne au moins 10 fois la cible est :

☐ $P(\text{X} = 11) + P(\text{X} = 12)$ ☐ $1 - [P(\text{X} = 10) + P(\text{X} = 11) + P(\text{X} = 12)]$
☐ $1 - [P(\text{X} = 11) + P(\text{X} = 12)]$ ☑ $P(\text{X} = 10) + P(\text{X} = 11) + P(\text{X} = 12)$

4. L'espérance de la variable aléatoire X est égale à :

☐ 3 ☑ 9
☐ 1 ☐ 4

Pour une loi binomiale, l'espérance de la variable aléatoire X est np.

ANNEXE B

Représentation graphique de f