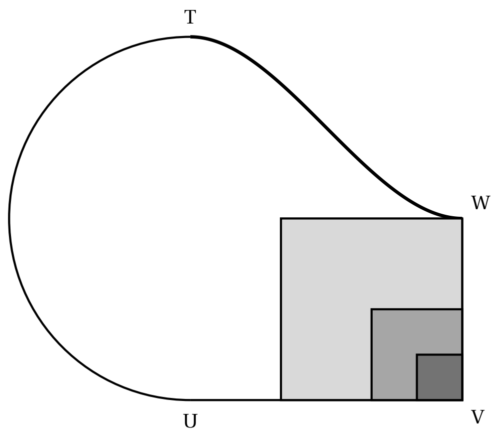
∽ Baccalauréat STD2A 7 septembre 2017 ∾
Métropole–La Réunion

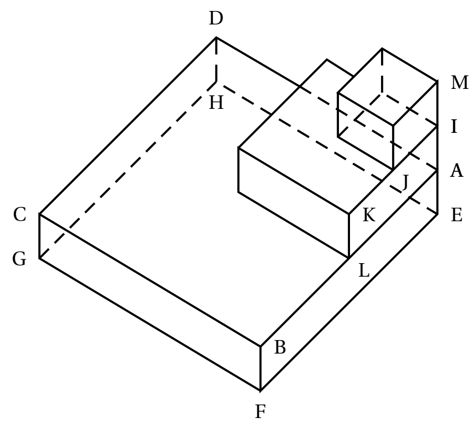
EXERCICE 1 **9 points**

Un architecte a conçu un bassin aquatique comportant trois marches.
La « Vue de dessus » de ce bassin et une représentation en perspective parallèle de ses trois marches sont données ci-dessous.
Les parties grisées de la « Vue de dessus » figurent les emplacements des trois marches.

« Vue de dessus »



« Les trois marches du bassin »



Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante

Le contour du bassin représenté dans la « vue de dessus » est constitué du demi-cercle de diamètre [TU], des deux segments [UV] et [VW] et d'une courbe $\mathscr{C}$, reliant T à W, étudiée dans la partie A.
On a de plus : TU = 8 m ; UV = 6 m et VW = 4 m.
Les trois marches de la piscine sont des pavés droits à bases carrées, de côtés respectifs 4 m, 2 m et 1 m. Ces trois pavés droits sont empilés de sorte que les points E, A, I, et M soient alignés. L est le milieu de l'arête [AB]. J est le milieu de l'arête [IK].
Chacune des trois marches a une hauteur de 40cm.

Partie A : Contour du bassin

Une partie du contour du bassin est représentée dans le repère orthonormal de l'**annexe 1 à rendre avec la copie**.

1. Par lecture graphique, donner une représentation paramétrique du demi-cercle de diamètre [TU].
2. La courbe $\mathscr{C}$ reliant T à W qui complète le contour du bassin représente un polynome de degré 3 défini sur l'intervalle [0 ; 6] par
   $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ou a, b, c et d et sont des réels.
   Pour que le raccordement soit parfait, la courbe $\mathscr{C}$ doit passer par les points T(0 ; 8) et W(6 ; 4) et ses tangentes en chacun de ces points doivent être horizontales.

a. Après avoir précisé les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$, déterminer les valeurs de c et d.

b. Justifier que les réels a et b sont solutions du système $\left\{\begin{array}{lcl} 54a+9b & = & 1 \\ 9a+b & = & 0 \end{array}\right.$.

c. Déterminer les valeurs de a et b.

3. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par

$$f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 8.$$

a. On note f' la dérivée de f. Calculer $f'(x)$.

b. Justifier que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

c. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

d. Dans le repère de l'**annexe 1 à rendre avec la copie**, tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ au point T, au point W et au point d'abscisse 3 puis tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

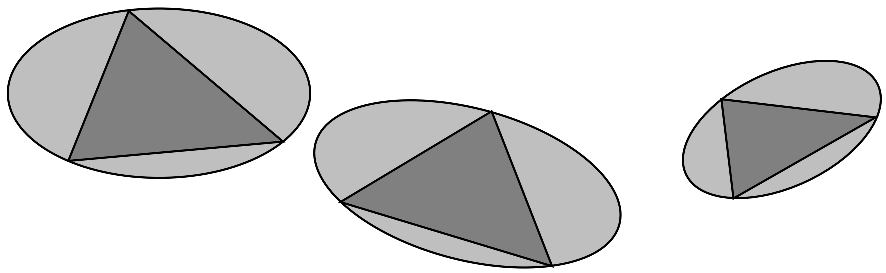
Partie B : Étude des marches du bassin

Sur l'**annexe 1 à rendre avec la copie**, on a représenté la marche ABCDEFGH en perspective centrale. a, b, c, d, e , f, g et h sont les images respectives des points A, B, C, D, E, F, G et H.
L'arête (ae) se situe dans un plan frontal.

1. Justifier que les droites (ab) et (cd) sont sécantes en un point que l'on nommera k_1.
   On admet que, de même, les droites (cb) et (ad) sont sécantes en un point nommé k_2.
2. Sur **l'annexe 1 à rendre avec la copie**, tracer la droite (k_1k_2).
   Que représente cette droite dans la représentation en perspective centrale ?
3. Que représente le centre de la face ABCD pour la marche dont l'un des sommets est le point K? Justifier.
4. Compléter la représentation en perspective centrale de l'**annexe 1 à rendre avec la copie**, en construisant l'image de la marche dont l'un des sommets est le point K.
   On laissera apparents les traits de construction et on repassera en couleur la marche dont l'un des sommets est le point K.

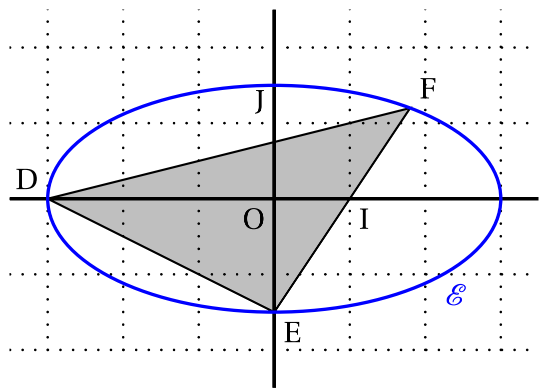
EXERCICE 2 **6 points**

Un artiste concoit des vitraux bicolores de forme elliptique comme ceux représentés ci-dessous.



Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante

Le premier vitrail est représenté ci-dessous dans un repère orthonormal (O, I, J). La courbe $\mathscr{C}$ passant par les points D, E et F est une ellipse de centre O.
Les points D et E sont deux des sommets de l'ellipse $\mathscr{E}$.



Partie A : Étude d'un premier vitrail

1. Donner l'équation réduite de l'ellipse $\mathscr{E}$ sachant que les coordonnées des points D et E sont D$(3\,;\,0)$ et E$(0\,;\,-1,5)$.
2. On admet que les coordonnées du point F sont F(1,8 ; 1,2).
   a. Vérifier que le point F appartient bien à l'ellipse $\mathscr{E}$.
   b. Le triangle DEF est-il rectangle en E ? Justifier.
   Sur l'**annexe 2 à rendre avec la copie**, on a représenté, dans un repère orthonormal (O, I, J), l'ellipse F de centre O qui donne sa forme à un second vitrail. Les points A(4 ; 0) et B(0 ; 2) sont deux sommets de l'ellipse F. On cherche le point C de l'ellipse F tel que le triangle ABC soit rectangle en B.

Partie B : Étude d'un second vitrail

1. Tracer le triangle ABC dans le repère de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.
2. On admet que l'ordonnée du point C est solution de l'équation (E) :

$$17y^2 - 4y - 60 = 0.$$

   a. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$. En déduire l'ordonnée du point C.

b. Déterminer l'abscisse du point C.

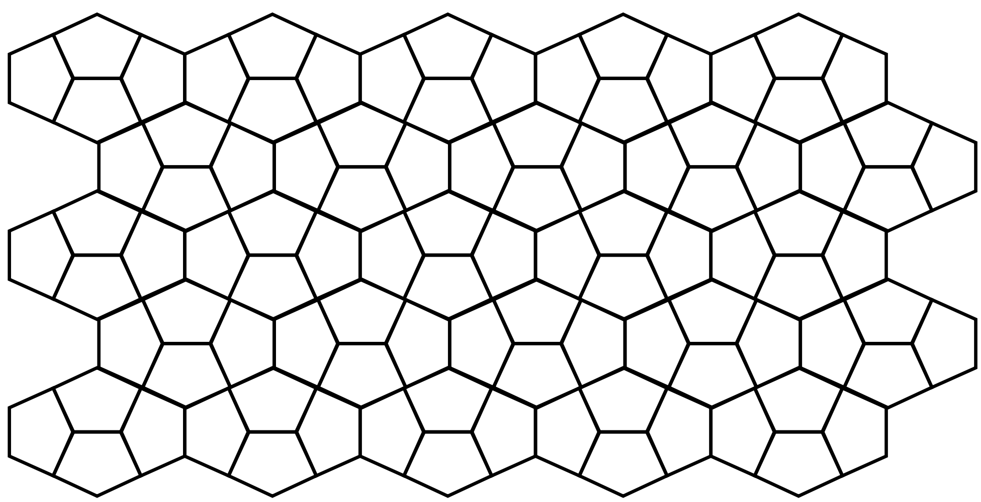
Partie C : Ombres au sol

L'artiste souhaite exposer ses œuvres en les faisant reposer sur des pieds comme le montre la représentation en perspective parallèle de l'annexe 2 à rendre avec la copie.
Les trois pieds [AA], [BB] et [CC] sont verticaux et de même hauteur. Le sol de la salle d'exposition est plat et horizontal.
Pour éclairer son œuvre, l'artiste utilise un projecteur représenté par le segment [SL]. Le pied du projecteur est vertical et repose sur le sol en S. La source lumineuse se situe en L au-dessus du plan de la table.

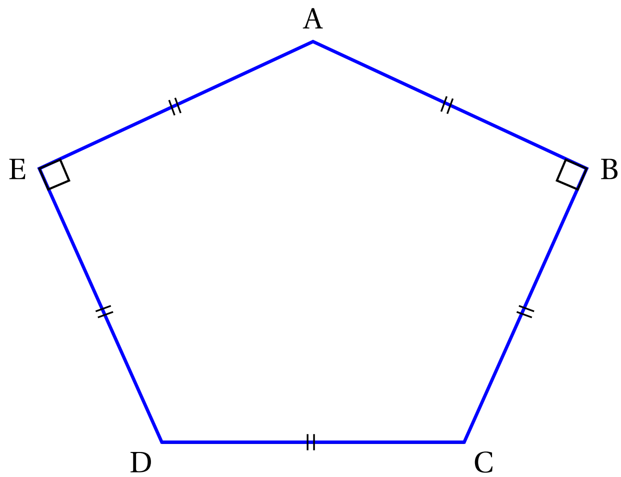
1. Justifier que les droites (LA) et (SA) sont sécantes. À quoi correspond leur point d'intersection ?
2. Construire l'ombre au sol du pied [AA$'$].
3. Construire puis repasser en couleur l'ombre au sol du triangle ABC.
   On laissera apparents les traits de construction.

EXERCICE 3 **5 points**

Certaines rues de la ville du Caire sont pavées d'une facon bien particulière. En géométrie, on parle ainsi de « pavages du Caire ». À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a construit un « pavage du Caire » représenté ci-dessous.



Dans cet exercice, on étudie le cas particulier ou le pentagone qui constitue le motif élémentaire de ce type de pavage possède deux angles droits et cinq cotés de même longueur comme sur la figure ci- dessous.



Partie A : Le pentagone

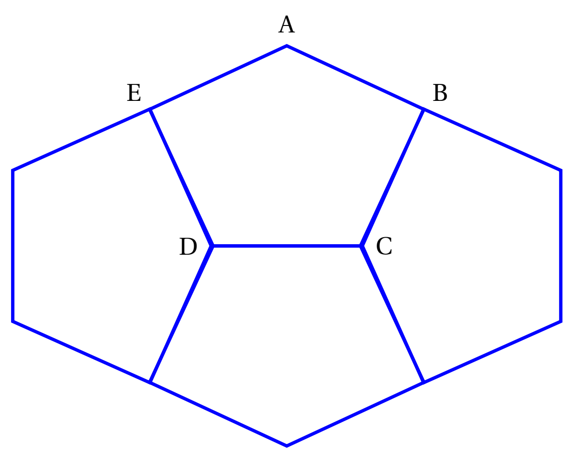
Dans cette partie, on suppose que AB = 3 cm.

1. Calculer la longueur AC.
2. À l'aide du théorème d'Al-Kashi, déterminer la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{\text{CAD}}$.

   On arrondira le résultat au degré.
3. Les angles $\widehat{\text{EAB}}$ et $\widehat{\text{EDC}}$ sont-ils égaux ? Justifier.
4. Déterminer l'aire du pentagone ABCDE. On arrondira le résultat au cm^2.

Partie B : Le pavage

1. Quatre pentagones identiques permettent de former un hexagone comme le montre la figure ci-dessous.



   a. Quelles transformations permettent d'obtenir cet hexagone à partir du pentagone ABCDE ?

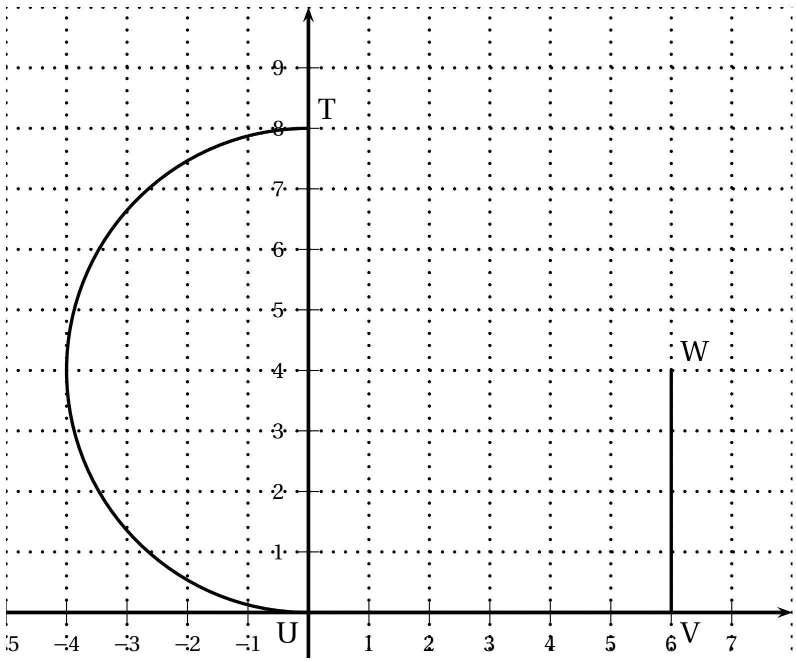
b. L'hexagone obtenu précédemment permet de paver le plan comme le montre la figure de **l'annexe 3 à rendre avec la copie**. Définir, à l'aide des points A, A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5, les vecteurs des translations qui permettent de paver le plan à partir de cet hexagone.

2. Identifier une autre facon de regrouper quatre pentagones identiques pour réaliser un motif qui permette de paver le plan en utilisant uniquement des translations.

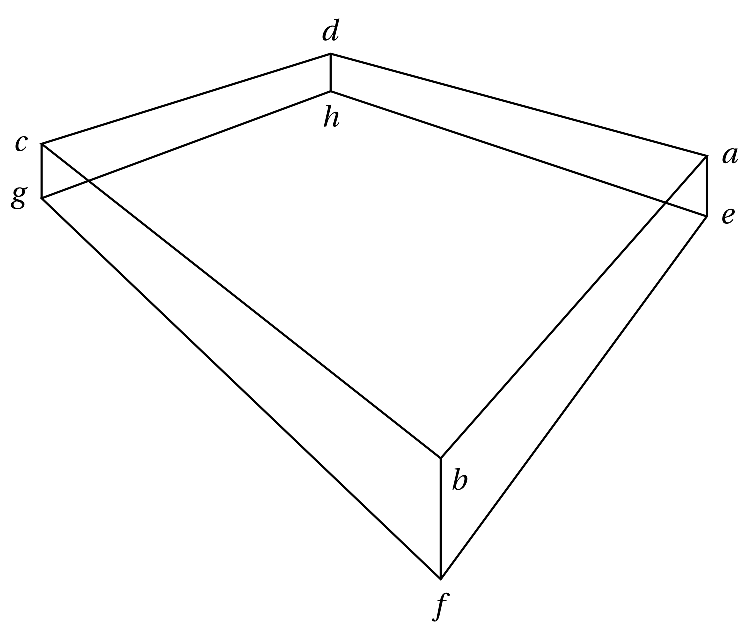
*On repassera en couleur ce motif sur la figure de l'**annexe 3 à rendre avec la copie**.*

Annexe 1 à rendre avec la copie

EXERCICE 1 - Partie A

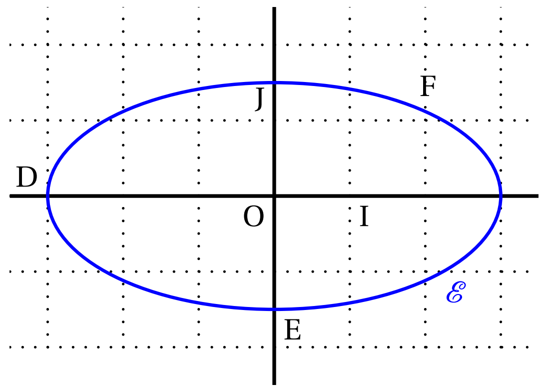


EXERCICE 1 – partie B

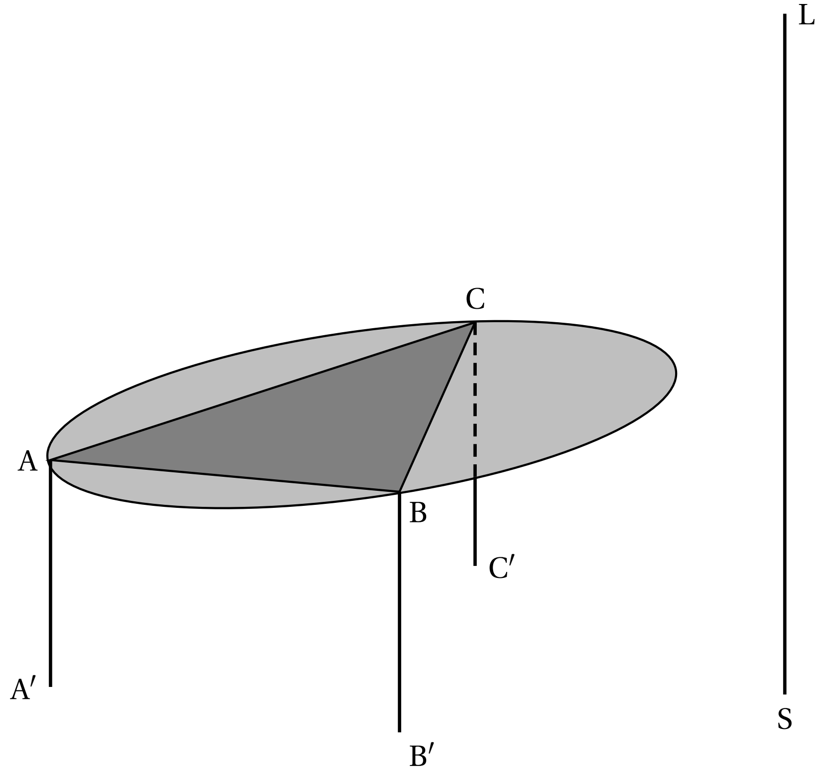


Annexe 2 à rendre avec la copie

EXERCICE 2 – partie B



EXERCICE 2 – partie C



Annexe 3 à rendre avec la copie

EXERCICE 3 – Partie B