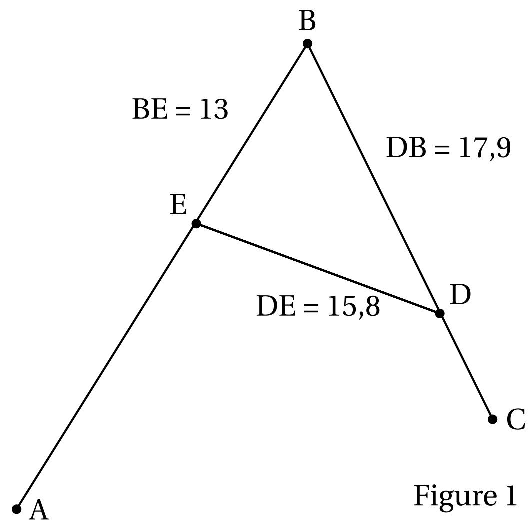
∾ Baccalauréat Antilles-Guyane 16 juin 2016 ∾
Sciences et technologies du design et des arts appliqués

EXERCICE 1 **7 points**

Une entreprise d'ébénisterie spécialisée dans les meubles en acajou souhaite moderniser le logo de son enseigne. Il s'agit d'un grand A en fer forgé d'allure plutôt austère, dont on a un schéma ci-dessous, sur lequel ont été reportées des mesures en décimètres. On envisage d'y apporter deux modifications, qu'on étudie dans les parties A et B de l'exercice.



BE = 13 dm

DB = 17,9 dm

DE = 15,8 dm

Figure 1

Partie A : Une planche en acajou

On souhaite remplir le triangle BED avec une planche en acajou, et en connaître la masse.

1. En utilisant la relation d'Al-Kashi, déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près de l'angle $\widehat{\text{EDB}}$ en degrés.
2. La planche en acajou installée a une épaisseur de 5 cm. La masse volumique de l'acajou est de 0,70 kg.dm^{-3}. Quelle sera alors la masse de la planche au kg près ?

   On rappelle que la masse est le produit du volume par la masse volumique.

Partie B : Prolongement du tracé

On se place dans un repère orthonormé, comme présenté en annexe 1.
On donne les coordonnées respectives des points A, B, C, D, E et F dans ce repère :

A(−6 ; 0) B(10 ; 25) C(20 ; 5) D(18 ; 9) E(3 ; 14) F(25 ; 0)

On recherche une fonction f définie sur l'intervalle [20 ; 30] telle que
$f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels à déterminer de telle sorte que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ réponde aux contraintes suivantes :

— $\mathscr{C}_f$ passe par les points C(20 ; 5) et F(25 ; 0)
— (BC) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point C.

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (BC).

2. Donner l'expression de $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

3. **a.** En exploitant les contraintes précédentes, justifier que les coefficients a, b et c vérifient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 625a + 25b + c & = & 0 \\ 400a + 20b + c & = & 5 \\ 40a + \quad b & = & -2 \end{array}\right.$$

b. Un logiciel de calcul fournit la réponse suivante :
$f : x \longmapsto 0,2x^2 - 10x + 125$.
Vérifier que cette expression convient.

4. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [20 ; 30]. On dressera le tableau de variations de f sur [20 ; 30].

5. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs de la fonction f ci-dessous.

x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$f(x)$											

b. Dans le repère donné en annexe 1, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle [20 ; 30].

EXERCICE 2 — 7 points

Un ébéniste doit construire un meuble pour enfant. Il s'agit d'un coffre à jouets qui, fermé, peut faire office de banquette et qui, ouvert, offre deux espaces de rangements.
Ce meuble fermé est un parallélépipède rectangle ABCDEFGH de longueur AB = 8 dm, de largeur AE = 3 dm et de hauteur AD = 3 dm.
Les points I et J sont les milieux respectifs de [BC] et de [AD]. Les points L et K sont deux points des arêtes respectives [EH] et [FG] , tels que EL = FK = 2,5 dm.
On donne ci-dessous une représentation en perspective parallèle de ce coffre fermé (Figure 2) et une autre de ce coffre en position ouverte suivant la charnière [IJ] (Figure 3).

Figure 2 : Coffre fermé

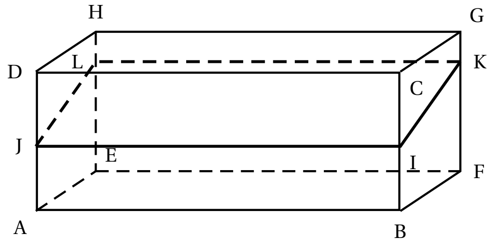
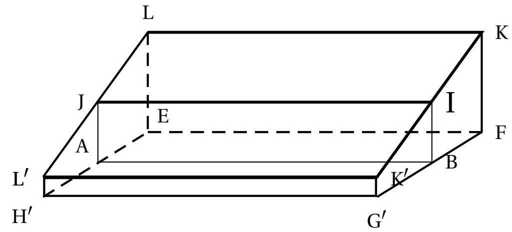


Figure 3 : Coffre ouvert



Partie A : Recherche de la valeur de l'angle de coupe

Afin de pouvoir régler la machine pour la découpe de la pièce, on a besoin de connaître l'angle $\widehat{\text{CIK}}$. Pour cela, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\frac{1}{8}\overrightarrow{\text{AB}},\ \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AE}},\ \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}}\right)$, représenté ci-dessous (figure 4).

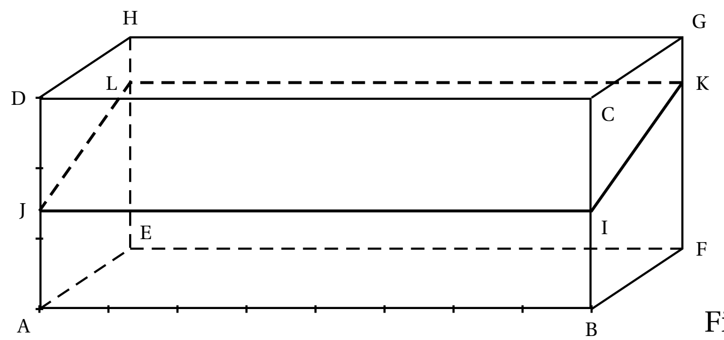


Figure 4

1. Donner sans justification les coordonnées des points F et H.

2. On admet que :

- I a pour coordonnées $(8\,;0\,;1{,}5)$
- K a pour coordonnées $(8\,;3\,;2{,}5)$
- C a pour coordonnées $(8\,;0\,;3)$

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{IC}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{IC}}\cdot\overrightarrow{\text{IK}}$.

c. En déduire la valeur exacte du cosinus de l'angle $\widehat{\text{CIK}}$, puis la valeur arrondie au degré près de cet angle.

Partie B : Représentation du meuble en perspective centrale

L'objectif de cette partie est de représenter ce meuble en position ouverte (figure 3) en perspective centrale. Dans cette représentation en perspective centrale, on note a, b, e, f, g′, h′, i, j, k, k′, l et l′ les images respectives des points A, B, E, F, G′, H′, I, J, K, K′, L et L′.

Sur l'annexe 2, les points a, b, i, f et k ont été placés et la ligne d'horizon a été tracée.

1. Construire le point e.

2. B est le milieu de [FG′] (voir la figure 3 représentant le coffre ouvert) : le point b sera-t-il le milieu du segment [fg′] ? Justifier.
3. Que peut-on dire des droites (be) et (g′a) ? Justifier.
   En déduire une construction du point g′.
4. Terminer, sur l'annexe 2, la représentation de ce meuble en position ouverte.
   On soignera le tracé et on laissera apparents les traits de construction.

EXERCICE 3 — 6 points

On souhaite décorer un meuble avec un motif qui renvoie à un univers d'enfant : on pense à une fleur.
Un pétale de fleur est donné par l'ellipse $\mathscr{E}$ dessinée ci-dessous (figure 5), et dont les points R, S, T et U sont les sommets.

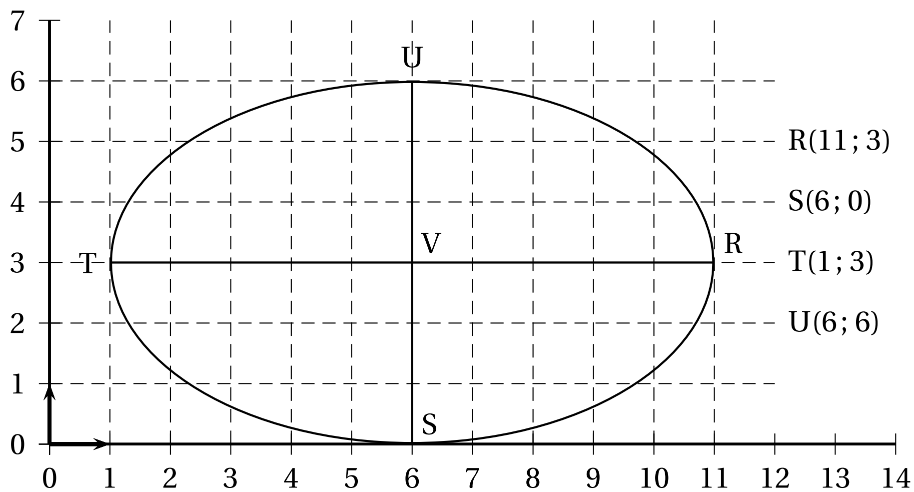


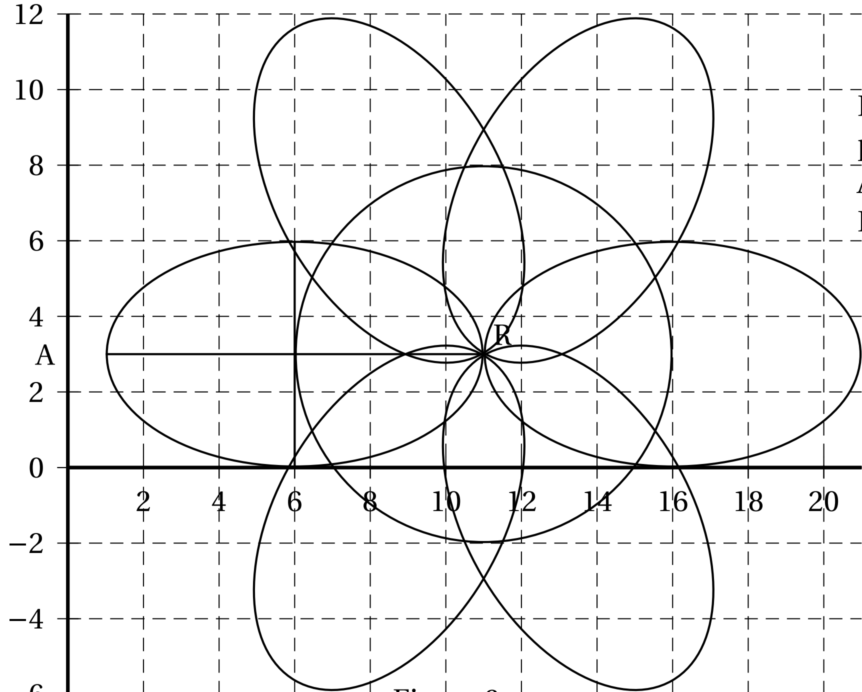
Figure 5

Partie A : Une fleur à quatre pétales

1. Donner une équation cartésienne de l'ellipse $\mathscr{E}$.
2. Le deuxième pétale de cette fleur est l'ellipse $\mathscr{F}$ d'équation :
   $\dfrac{(x-11)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{25}=1.$
   a. Montrer que le point R de coordonnées (11 ; 3) est un point commun aux ellipses $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.
   b. Préciser les coordonnées du centre W de l'ellipse $\mathscr{F}$.
   Sur l'annexe 3, placer le point W et tracer les axes de cette ellipse.
   Tracer alors une allure de l'ellipse $\mathscr{F}$.
   c. Déterminer une transformation qui permet d'obtenir l'ellipse $\mathscr{F}$ à partir de l'ellipse $\mathscr{E}$. On précisera le ou les éléments caractéristiques de cette transformation.

d. Déterminer les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de $\mathscr{F}$ avec l'axe des abscisses.

Partie B : Une fleur à six pétales



Les points A et R ont pour coordonnées :
A(0 ; 3)
R(11 ; 3)

Figure 6

On préfère finalement une fleur à six pétales (figure 6).

1. Quelle transformation, appliquée de façon répétée, permet d'obtenir cette fleur à six pétales à partir de l'ellipse $\mathscr{F}$?

2. On souhaite reproduire ce motif en utilisant un pavage hexagonal.

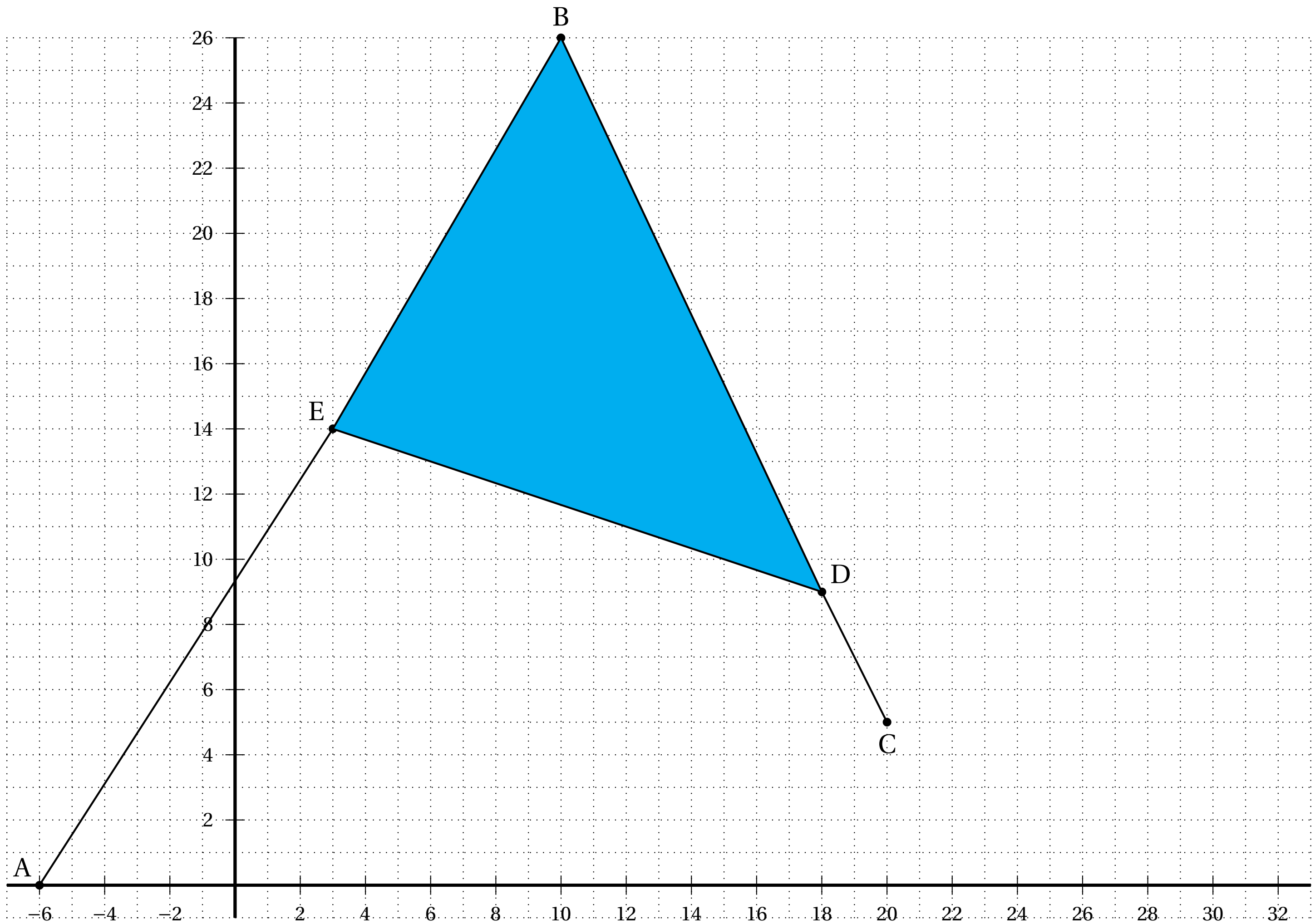
a. Sur l'annexe 4, on a représenté la fleur obtenue à la question 1, ainsi que les points R et A.

Construire au compas l'hexagone régulier de centre R, admettant le point A pour sommet. On appellera cet hexagone ABCDEF et on laissera apparents les traits de construction.

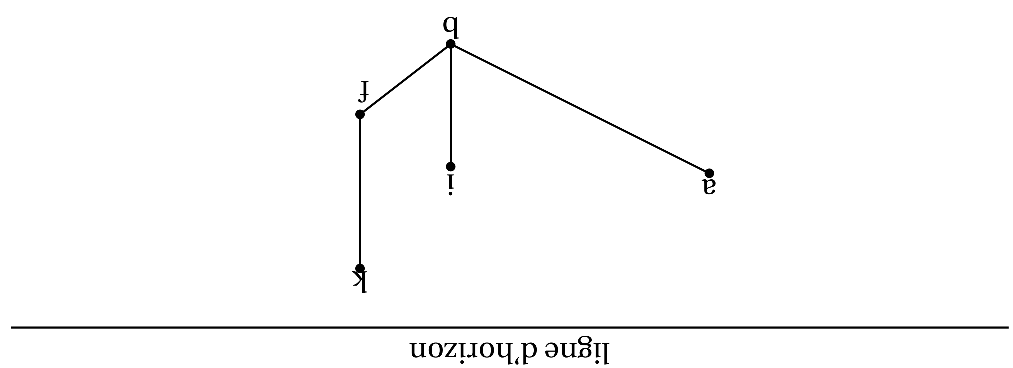
Cet hexagone encadre la fleur grisée et l'ensemble constitue le motif « fleur ».

b. Par quelle(s) translation(s) peut-on réaliser le pavage présenté en annexe 4 ? En exprimer les éléments caractéristiques à l'aide des points A, B, C, D, E, F ou R, et tracer en annexe 4 un représentant des vecteurs en question.

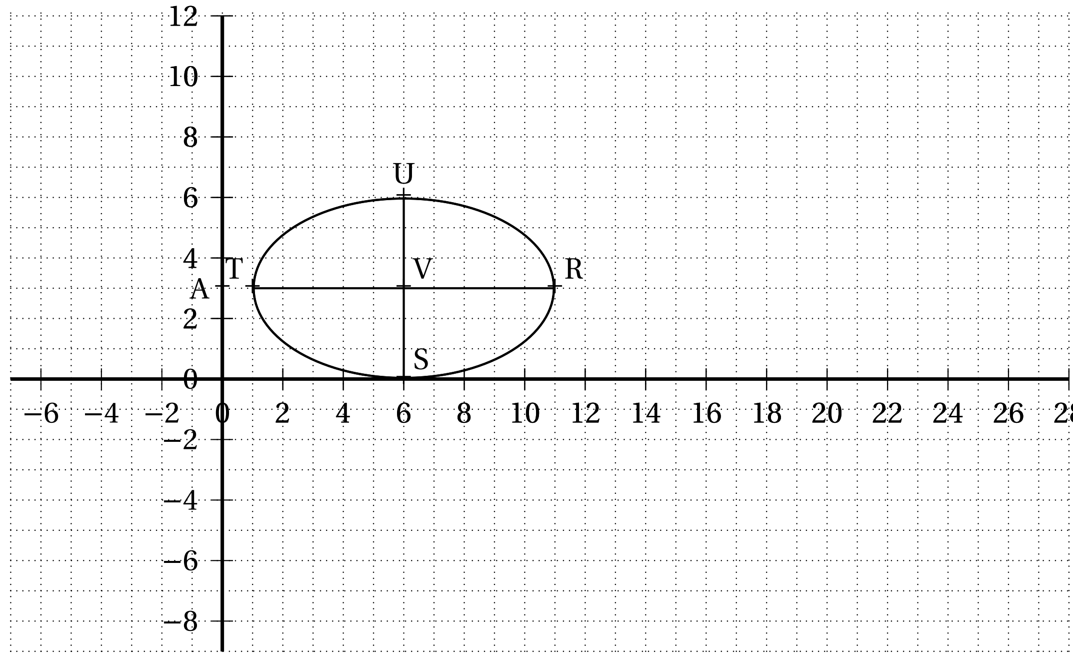
Annexe 1 - Exercice 1 (à rendre avec la copie)



Annexe 2 - Exercice 2 (à rendre avec la copie)



Annexe 3 - Exercice 3 à rendre avec la copie



Annexe 4 - Exercice 3 à rendre avec la copie