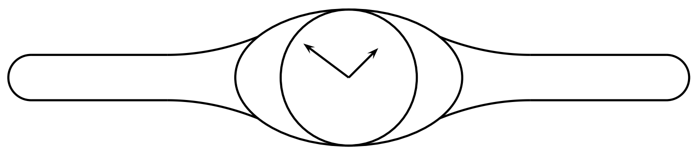
Baccalauréat Métropole–La Réunion 16 juin 2016
Sciences et technologies du design et des arts appliqués

EXERCICE 1 **8 points**

Un styliste a imaginé la montre-bracelet pour enfants représentée ci-dessous.



La montre et son bracelet ont été dessinés dans le repère orthonormal (0, I, J) de **l'annexe 1**. Pour la montre, la figure est constituée d'une ellipse $\mathscr{E}$ et d'un cercle Γ. Pour le bracelet, la figure est constituée d'un arc de parabole reliant les points B et C, du segment [CD], du demi-cercle de diamètre [DE] et de leurs symétriques par rapport aux axes de coordonnées.
Dans le repère (O, I, J), les points A, B, C, D et E ont pour coordonnées A(0; 3), B(4; 1,8), C(8; 1), D(14; 1) et E(14 ; −1).
Les points H et K sont les points d'intersection d'abscisses positives respectivement du cercle Γ et de l'ellipse $\mathscr{E}$ avec l'axe (OI).

Partie A : étude des différentes parties composant la montre-bracelet

1. **La partie montre**

   L'ellipse $\mathscr{E}$ et le cercle Γ ont pour centre O.

   a. Dans le repère (O, I, J), une équation cartésienne de l'ellipse $\mathscr{E}$ est $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
   Donner la longueur de chacun des axes de l'ellipse.

   b. Justifier que le point B est un point de l'ellipse $\mathscr{E}$.

   c. Le cercle Γ passe par le point A. Donner une équation cartésienne du cercle Γ.

   d. L'ellipse $\mathscr{E}$ a été obtenue à partir du cercle T par affinité orthogonale d'axe (OJ).
   Donner le rapport $\dfrac{\text{OK}}{\text{OH}}$ de cette affinité orthogonale.

2. **La partie bracelet**

   La partie reliant les points B et C est un arc de la parabole $\mathscr{P}$ qui représente la fonction f définie par

   $$f(x) = 0,05x^2 - 0,8x + 4,2.$$

   a. Vérifier que les points B et C sont bien des points de la parabole $\mathscr{P}$

b. La tangente à la parabole $\mathscr{P}$ au point C est-elle parallèle à l'axe (OI) ? Justifier.
Que peut-on dire du raccordement au point C entre l'arc de la parabole $\mathscr{P}$ et le segment [CD] ?

c. On admet que la tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$ au point B a pour équation $y = -0,8x + 5$.
Que peut-on dire du raccordement entre l'arc de parabole et l'ellipse $\mathscr{E}$ au point B ? Justifier.

d. Donner une représentation paramétrique du demi-cercle de diamètre [DE].

Partie B : nouveau modèle de montre-bracelet

Afin de réduire la partie métallique et de lisser l'objet, le styliste souhaite ne conserver que le cercle Γ en métal. Pour le bracelet, il veut relier les points A et C par la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction g définie, sur l'intervalle $[0 ; 8]$, par

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{où } a, b, c \text{ et } d \text{ sont des réels.}$$

1. Donner l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g.

2. On souhaite que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A et C soient parallèles à l'axe (OI).

a. Donner $g(0)$, $g'(0)$, $g(8)$ et $g'(8)$.

b. En déduire un système d'équations vérifié par a, b, c et d.

c. Résoudre ce système.

3. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 8]$, $g(x) = \dfrac{1}{128}x^3 - \dfrac{3}{32}x^2 + 3$.

a. Compléter le tableau de valeurs donné en **annexe 2** à rendre avec la copie.
On arrondira les résultats au dixième.

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère donné en **annexe 2** à rendre avec la copie.
Compléter la figure pour obtenir le nouveau modèle de montre-bracelet.

EXERCICE 2 **7 points**

Le palais de l'Alhambra à Grenade est réputé pour ses ornements muraux représentants différents pavages du plan. L'un des plus célèbres est représenté ci-dessous. Il est constitué de motifs *pajarita*.

Partie A : construction d'un motif *pajarita* à partir d'un triangle équilatéral

On veut compléter la figure constituée d'un triangle équilatéral ABC de l'annexe 3 à rendre avec la copie afin de construire le motif *pajarita* représenté ci-contre.

1. Placer les points A′, B′ et C′ milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

2. Construire les droites Δ, Δ' et Δ'' médiatrices respectives des segments [AB′], [BC′] et [CA′].

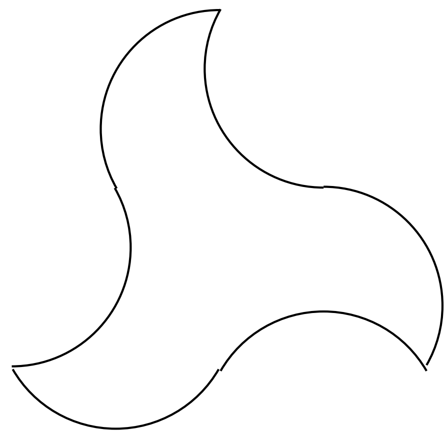
On note :

— I le point d'intersection de Δ et Δ'

— J le point d'intersection de Δ' et Δ''

— K le point d'intersection de Δ'' et Δ.

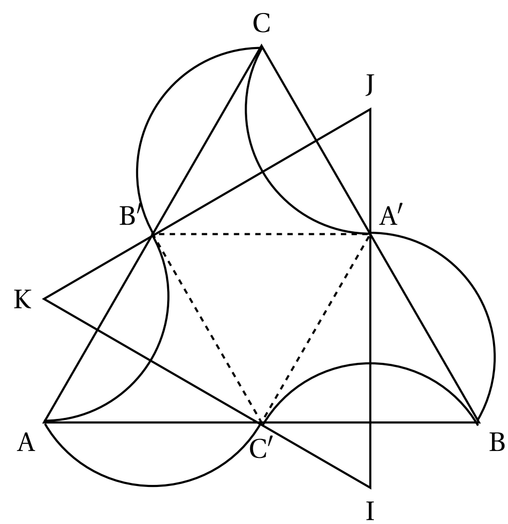
3. Construire les arcs de cercle, internes au triangle ABC, de centres respectifs I, J et K et reliant respectivement les points B et C′, C et A′ et A et B′ puis leurs symétriques respectifs par rapport aux points C′, A′ et B′ pour obtenir le motif *pajarita*.



Partie B : quelques propriétés géométriques

On considère le motif *pajarita* obtenu à partir du triangle équilatéral ABC, construit dans la partie A et représenté ci-contre. Les sommets de ce motif *pajarita* sont les points A, B et C.

Les points I, J et K construits dans la question 2. de la partie A sont les centres respectifs des arcs de cercle reliant les points B et C′, C et A′ et A et B′.



1. Tangente commune

a. Sur quel segment de la figure ci-contre se trouve le centre de l'arc de cercle reliant les points B′ et C ? Justifier.

b. Prouver que les arcs de cercle reliant les points A et B′ et B′ et C ont la même tangente au point B′.

Justifier.

2. Tangente au sommet

a. Justifier que les droites $\left(A'B'\right)$ et (IJ) sont perpendiculaires.

b. En déduire que l'angle $\widehat{B'CJ}$ est droit.

c. Quelle est la tangente en C à l'arc reliant les points A′ et C ? Justifier.

Partie C : pavage du plan

1. Par quelles transformations peut-on obtenir le pavage de **l'annexe 3** à rendre avec la copie à partir du motif *pajarita* ?

Pour définir ces transformations, placer les points nécessaires sur la figure de **l'annexe 3** à rendre avec la copie.

2. Un carreleur souhaite recouvrir un mur de motifs *pajarita*. Pour des questions pratiques, il veut utiliser des carreaux de forme hexagonale.

a. **Sur l'annexe 3 à rendre avec la copie**, dessiner soigneusement un exemple d'hexagone régulier, le plus petit possible, dont les sommets sont des sommets de motifs *pajarita* et qui permette de paver le plan.

b. Par quelles transformations peut-on obtenir le pavage de **l'annexe 3 à rendre avec la copie** en utilisant ce motif hexagonal ?

Exercice 3 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM)

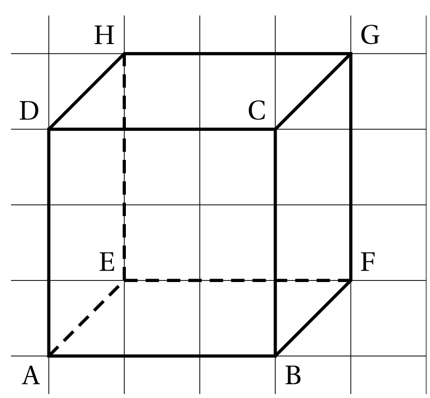
Pour chacune des cinq questions, **une seule des quatre réponses proposées est correcte**. Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. On note log la fonction logarithme décimal. Le nombre réel $\log\left(10^5 \times 2,2\right)$ est égal à :

- 7,2
- $5 \times \log(2,2)$
- $5 + \log(2,2)$
- 5,34

2.

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 3 représenté ci-contre.



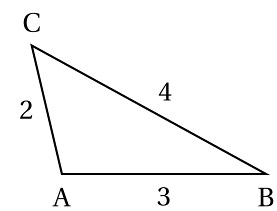
Le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{EH}$ est égal à :

- 9
- $3\sqrt{3}$
- -9
- $-3\sqrt{3}$

3. La solution de l'équation $8+2x^3=20$ est :

- 1,817
- 6^{-3}
- 2
- $6^{\frac{1}{3}}$

4. On considère le triangle ABC ci-contre.

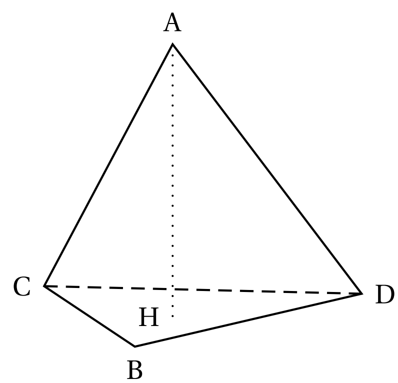


Le cosinus de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ est égal à :

- 9
- $\dfrac{7}{8}$
- $-\dfrac{1}{4}$
- $\dfrac{11}{16}$

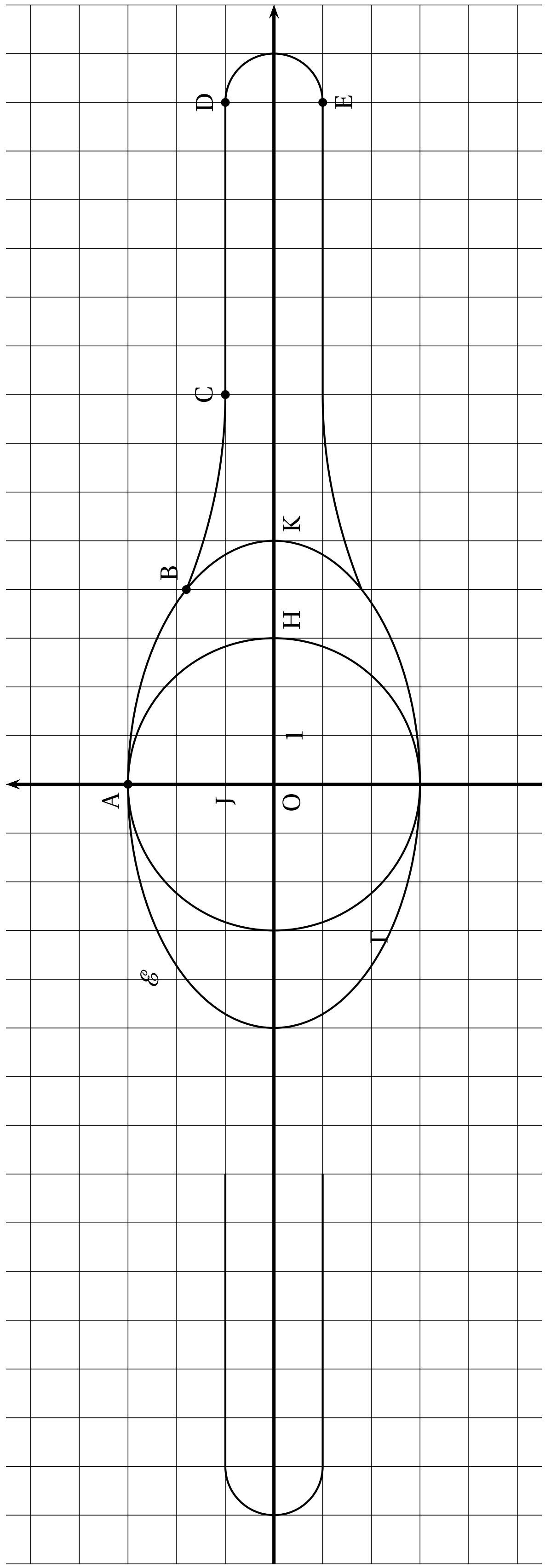
5.

Toutes les faces du tétraèdre régulier ABCD représenté ci-contre sont des triangles équilatéraux. H est le centre de gravité de la face BCD.
Le tétraèdre ABCD est invariant par la rotation d'axe (AH) et d'angle :



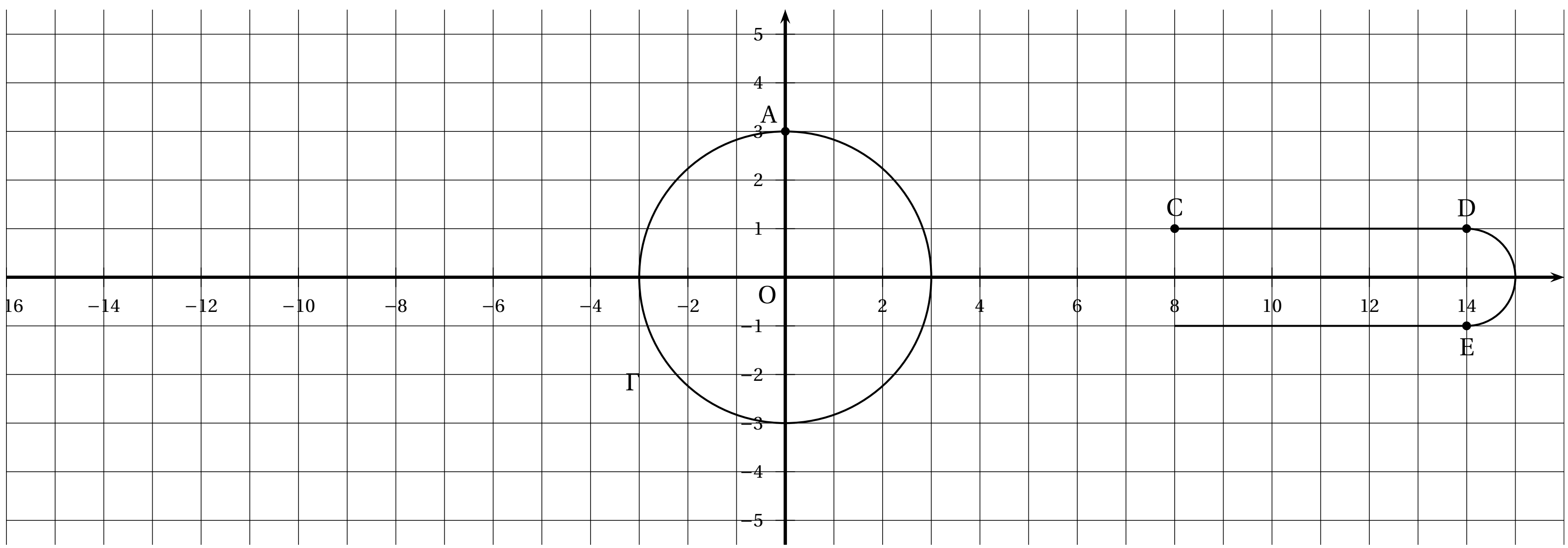
- 90 °
- 120 °
- 60 °
- 180 °

Annexe 1



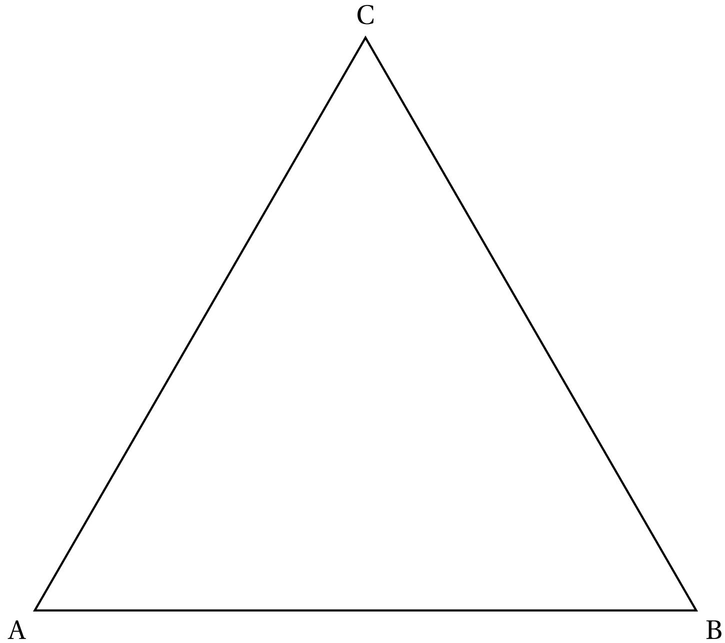
Annexe 2 à rendre avec la copie

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$									



Annexe 3 à rendre avec la copie

EXERCICE 2 – Partie A



EXERCICE 2 - Partie C