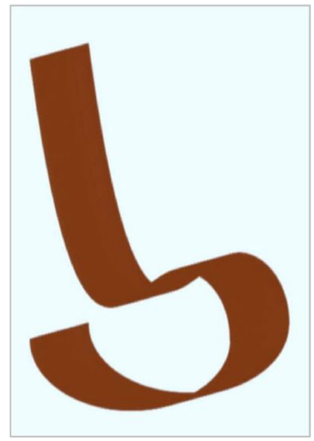
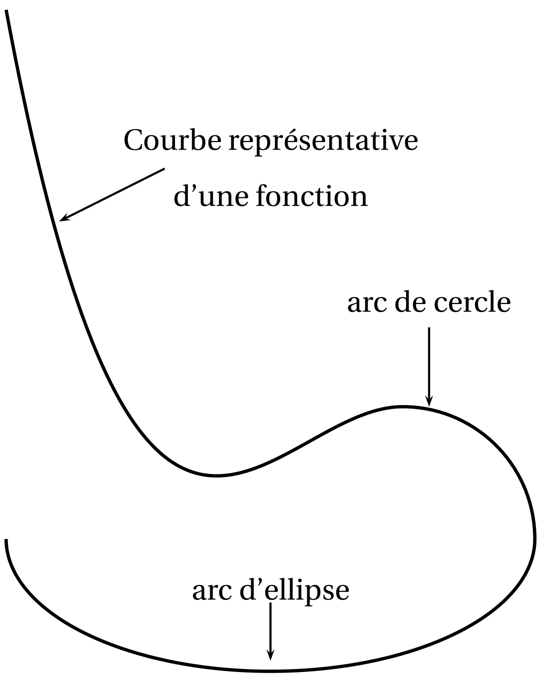
Baccalauréat STD2A Métropole–La Réunion
18 juin 2019

EXERCICE 1 **9 points**

Le mobilier national a présenté en 2017 une exposition intitulée « Sièges en Société, du Roi-Soleil à Marianne » à la galerie des Gobelins.
L'objectif de cet exercice est d'étudier une modélisation mathématique du profil d'un rocking-chair présenté lors de l'exposition.





On envisage pour cette modélisation de raccorder, comme représentés ci-contre, un arc d'ellipse $\mathscr{E}$, un arc de cercle $\mathscr{C}$, et la courbe représentative $\mathscr{L}$ d'une fonction.

On souhaite représenter cette modélisation dans **l'annexe 1 à rendre avec la copie.**
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points :

$$\text{A}(0 ; 125), \text{B}(0 ; 25), \text{C}(100 ; 25), \text{D}(75 ; 50) \text{ et } \text{E}(75 ; 25)$$

Partie A : l'arc de cercle $\mathscr{C}$

Une représentation paramétrique de l'arc $\mathscr{C}$ est : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 75 + 25\cos t \\ y &=& 25 + 25\sin t \end{array}\right. ; t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Préciser le centre et le rayon de l'arc de cercle $\mathscr{C}$.
2. Vérifier que le point D appartient à l'arc de cercle $\mathscr{C}$.
3. Tracer **sur l'annexe 1 à rendre avec la copie**, l'arc de cercle $\mathscr{C}$.
4. **a.** Tracer, **sur l'annexe 1 à rendre avec la copie**, la tangente (T) à cet arc de cercle $\mathscr{C}$, au point D.

   b. Quel est le coefficient directeur de la droite (T) ? Expliquez votre réponse sur votre copie.

Partie B : l'arc d'ellipse $\mathscr{E}$

On considère les points F$(50\,;\,0)$ et F$'(50\,;\,50)$. Et on note $\mathscr{E}$ l'ellipse dont les axes sont les segments [BC] et [FF$'$].

1. Déterminer une équation cartésienne de l'ellipse $\mathscr{E}$.
2. L'arc $\mathscr{E}$ est la demi-ellipse de $\mathscr{E}$ d'extrémités B et C et contenant le point F. Sur **l'annexe 1 à rendre avec la copie**, tracer une esquisse de l'arc $\mathscr{E}$.

Partie C : La courbe $\mathscr{L}$

La courbe $\mathscr{L}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,75]$ par :

$$f(x) = -0{,}000\,6x^3 + ax^2 + bx + c, \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels à déterminer.}$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. On souhaite que la courbe $\mathscr{L}$ passe par le point A. Montrer alors que $c = 125$.
2. Déterminer l'expression de la fonction f'.
3. Le point D est le point de raccordement de la courbe $\mathscr{L}$ avec l'arc de cercle $\mathscr{C}$. On souhaite que les contraintes suivantes soient vérifiées au point D :

   - la courbe $\mathscr{L}$ passe par D ;
   - la droite (T) de la partie A est tangente à la courbe $\mathscr{L}$ au point D.

   a. Montrer que les réels a et b vérifient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 75a+b & = & 2{,}375 \\ 150a+b & = & 10{,}125 \end{array}\right.$$

   b. Calculer a et b.

On admet dans la suite de l'exercice que :

$$f(x) = -0{,}000\,6x^3 + \frac{31}{300}x^2 - 5{,}375x + 125 \text{ sur l'intervalle } [0\,;\,75].$$

4. Sur l'**annexe 1 à rendre avec la copie**, compléter le tableau de valeurs de la fonction f (on arrondira les valeurs à l'unité). Puis tracer une esquisse de la courbe $\mathscr{L}$.
5. (*Dans cette question, on veillera à faire figurer sur la copie toute trace de recherche même incomplète.*)

EXERCICE 2 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions, **une seule des quatre réponses proposées est correcte**.
Pour chaque question, indiquer sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte 1 *point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.*

1. On considère un triangle ABC tel que AB = 6 cm, BC = 7 cm et $\widehat{\text{ABC}} = 50°$.
   Une valeur approchée de la longueur AC est :

   a. 7,2 cm **b.** 7,6 cm **c.** 5,6 cm **d.** 11,8 cm

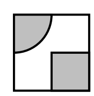
2. La valeur exacte de la solution de l'équation $3\log x + 2 = 0$ est :

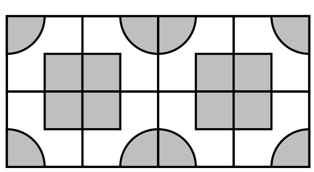
   a. $0,22$ **b.** $10^{\frac{2}{3}}$ **c.** 4,64 **d.** $10^{-\frac{2}{3}}$

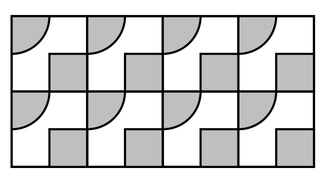
3. On souhaite réaliser un pavage à l'aide de tomettes, composées de six triangles équilatéraux de côté 5 cm. La valeur exacte de l'aire en cm^2 d'une tomette est :

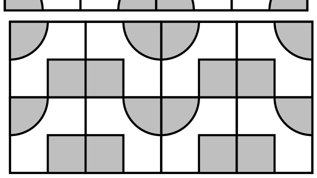
   a. $\dfrac{75}{2}\sqrt{3}$ **b.** 64 **c.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ **d.** 150

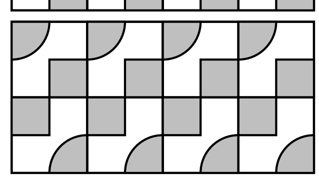
4. Parmi les 4 pavages ci-dessous, le pavage obtenu par une symétrie centrale suivie de translations à partir du motif ci-contre est :

   
   a.

   
   b.

   
   c.

   
   d.

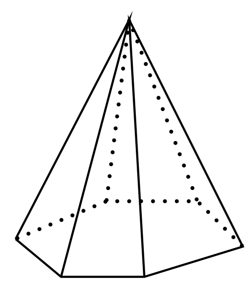
5. Dans un repère orthonormé du plan, les coordonnées des points d'intersection de l'axe des ordonnées et de l'ellipse d'équation $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{8}=1$, sont :

a. $\left(0\,;\,1-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(0\,;\,1+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ **b.** $\left(0\,;\,-\dfrac{14}{3}\right)$ et $\left(0\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$

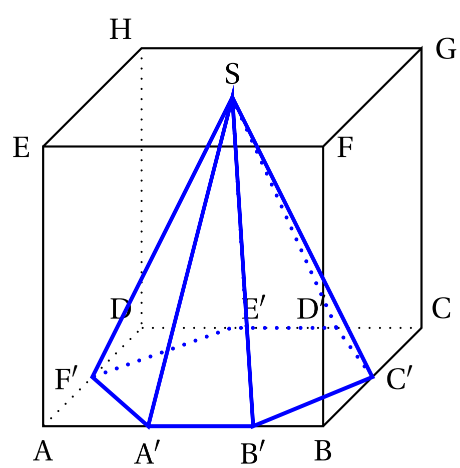
c. $\left(1-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\,;\,0\right)$ et $\left(1+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\,;\,0\right)$ **d.** $\left(-\dfrac{14}{3}\,;\,0\right)$ et $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,0\right)$

EXERCICE 3 **6 points**

Un parfumeur souhaite un flacon original pour son nouveau parfum.
Un verrier lui propose un flacon modélisé par une pyramide représentée ci-contre.



On donne ci-après une représentation en perspective parallèle de cette pyramide notée SA′B′C′D′E′F′.



— La pyramide SA′B′C′D′E′F′ est inscrite dans un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm.

— Le sommet S de la pyramide est le centre de la face EFGH du cube.

— La base A′B′C′D′E′F′ de cette pyramide est contenue dans la face ABCD du cube.

— Les points C′ et F′ sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AD].

— Les points A′ et B′ appartiennent au segment [AB].

— Les points D′et E′ appartiennent au segment [CD].

— Et AA′ = A′ B′ = CD′ = E′D′ = 3 cm.

Partie A : Étude de la pyramide

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ d'origine A et d'unité 1 cm, tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{\text{AB}}\,; \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{\text{AD}}\,; \quad \text{et } \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{\text{AE}}.$$

Ainsi, dans ce repère le point G a pour coordonnées (8; 8; 8) et le point C a pour coordonnées (8; 8; 0).

1. Donner les coordonnées de chacun des points S, A$'$, B$'$ et C$'$ dans ce repère.
2. Calculer B$'$C$'$. La base de la pyramide est-elle un polygone régulier ? (Justifier)
3. Déterminer une valeur de la mesure en degré de l'angle $\widehat{\text{A}'\text{SB}'}$ (on arrondira à l'unité).

Partie B : Représentation en perspective centrale

Le début d'une représentation en perspective centrale du cube ABCDEFGH est donné en **annexe 2 à rendre avec la copie**. Dans cette représentation en perspective centrale :

— Le plan (ABF) est frontal et Δ est la ligne d'horizon.

— Chaque point désigné par une lettre minuscule, dans la perspective centrale, représentera le point désigné par la même lettre majuscule dans la perspective parallèle. Par exemple les points *a, b, c* représenteront, dans la perspective centrale, respectivement les points A, B, C.

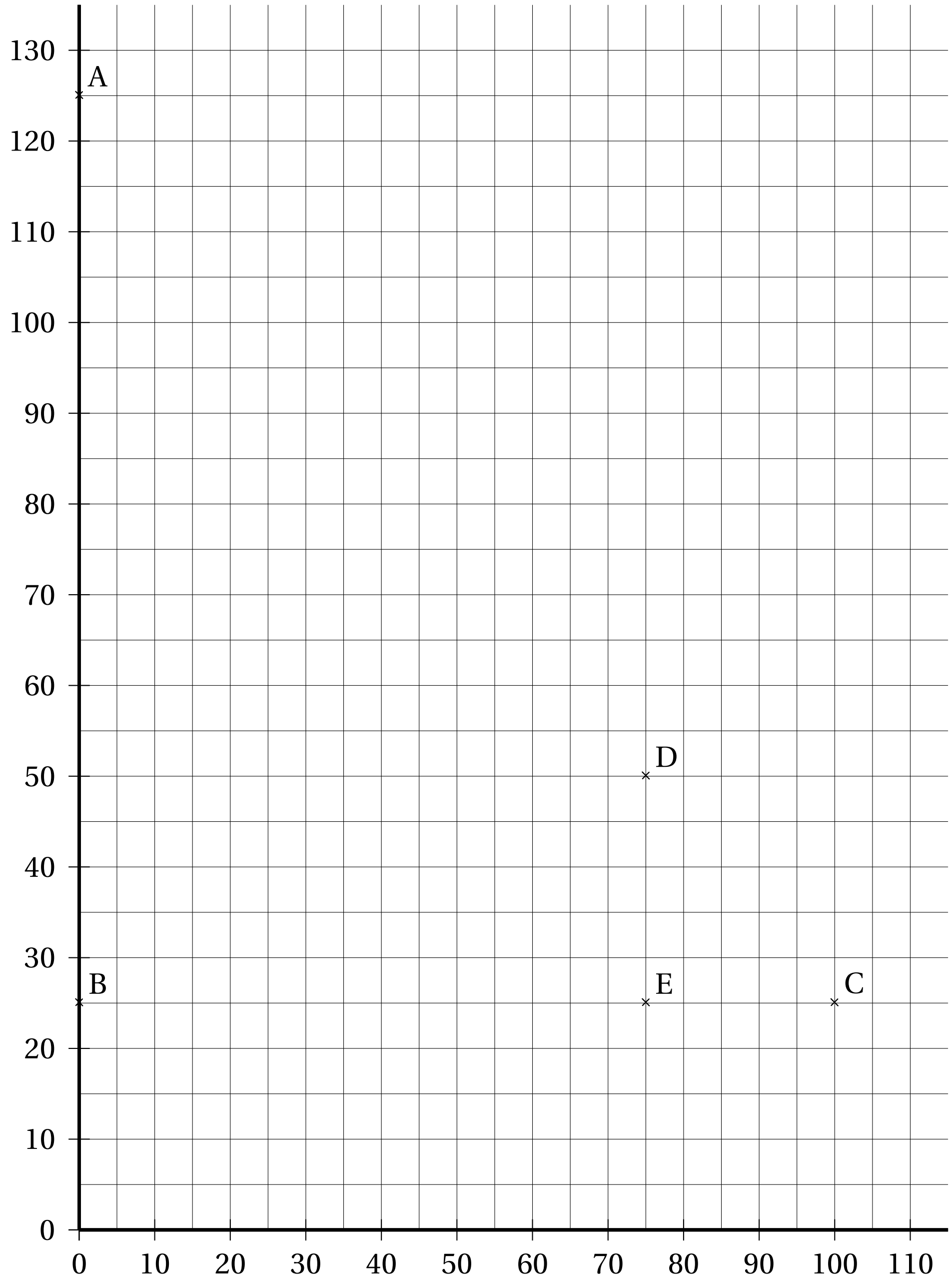
— **On laissera les traits de construction apparents**.

1. Sur **l'annexe 2 à rendre avec la copie**, compléter la représentation en perspective centrale *abcdefgh* du cube ABCDEFGH et placer les points a' et b'.
2. Le point c' est-il le milieu du segment $[bc]$? Justifier.
3. Tracer les diagonales du quadrilatère $abcd$. Puis construire les points c' et f'.
4. Terminer la représentation en perspective centrale $sa'b'c'd'e'f'$ de la pyramide SA$'$B$'$C$'$D$'$E$'$F$'$.

   On soignera le tracé et on repassera la pyramide en couleur.

Annexe 1 : (à rendre avec la copie)

Exercice 1 : Parties A, B et C



Exercice 1 Partie C question 4

x	0	10	20	25	30	35	40	45	50	60	70	75
$f(x)$	125											

Annexe 2 : (à rendre avec la copie)

Exercice 3 : Partie B