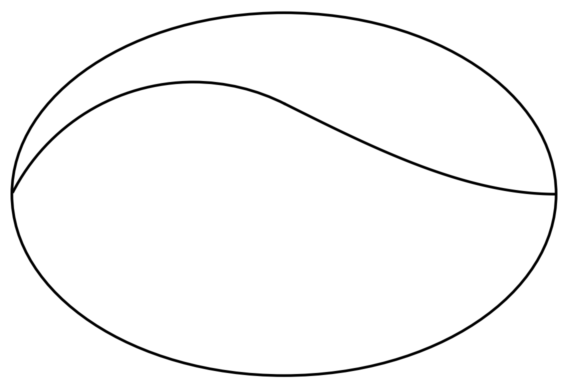
Baccalauréat STD2A Métropole–La Réunion 6 septembre 2018

EXERCICE 1 **8 points**

Un centre de bien-être fait appel à une agence de communication pour créer un logo.
L'agence propose l'esquisse suivante :



L'objectif de cet exercice est d'étudier la construction de ce logo.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La figure de l'**annexe 1, à rendre avec la copie**, sera complétée au fur et à mesure.

Partie A : Ellipse et arc de cercle

1. **Ellipse**

   L'ellipse $\mathcal{E}$ de centre O, de grand axe (AA′) et de petit axe (BB′) est représentée en **annexe 1 à rendre avec la copie**. Les sommets A, A′, B et B′ de l'ellipse $\mathcal{E}$ ont pour coordonnées A(6 ; 0) ; A′(−6 ; 0) ; B(0 ; 4) et B′(0 ; −4).

   a. Montrer que $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ est une équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$.

   b. Vérifier que le point $F\left(3 ; \sqrt{12}\right)$ est un point de l'ellipse $\mathcal{E}$.

   c. Donner une représentation paramétrique de l'ellipse $\mathcal{E}$.

2. **Arc de cercle**

   On appelle $\mathcal{C}$ le cercle de centre K(−2 ; −2) et de rayon GK où G est le point de coordonnées G(O ; 2).

   a. Montrer que le point A′ appartient au cercle $\mathcal{C}$.

   b. $\overset{\frown}{A'G}$ est l'arc du cercle $\mathcal{C}$ reliant les points A′ et G(0 ; 2) qui se trouve au-dessus du grand axe de l'ellipse $\mathcal{E}$. Tracer l'arc $\overset{\frown}{A'G}$ sur l'**annexe 1 à rendre avec la copie**.

   c. Donner une représentation paramétrique du cercle $\mathcal{C}$.

d. On considère le point H(2 ; 1). Montrer que la droite (GH) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point G.

e. Déterminer le coefficient directeur de la droite (GH).

Partie B : Raccordement et courbe

On souhaite relier le point G au point A par la courbe représentative d'une fonction décroissante sur l'intervalle [0 ; 6]. $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 6] par : $f(x) = ax^3 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels.
Dans cette partie on cherche à déterminer les valeurs de a, b et c.

1. Donner l'expression de $f'(x)$.

2. On souhaite que $\mathscr{C}_f$ passe par le point G (0 ; 2) et que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en G ait pour coefficient directeur $-0,5$. Déduire de ces deux conditions les valeurs de b et c.

3. Sachant que $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(6 ; 0), déterminer la valeur de a.

4. Dans cette question, on admet que la fonction [est définie sur l'intervalle [0 ; 6] par :

$$f(x) = \frac{1}{216}x^3 - \frac{1}{2}x + 2.$$

a. Démontrer que f est décroissante sur l'intervalle [0 ; 6].

b. Calculer $f'(6)$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

c. Montrer que l'arc de cercle $\mathscr{E}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ ont la même tangente au point G.

On pourra utiliser les résultats de la **Partie A** *question* 2.

d. Compléter le tableau de valeurs de l'**annexe 1 à rendre avec la copie**.

On arrondira les résultats au dixième.

e. Compléter la figure de l'**annexe 1 à rendre avec la copie** par le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 2 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chacune des questions, **une seule des quatre réponses proposées est correcte**.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

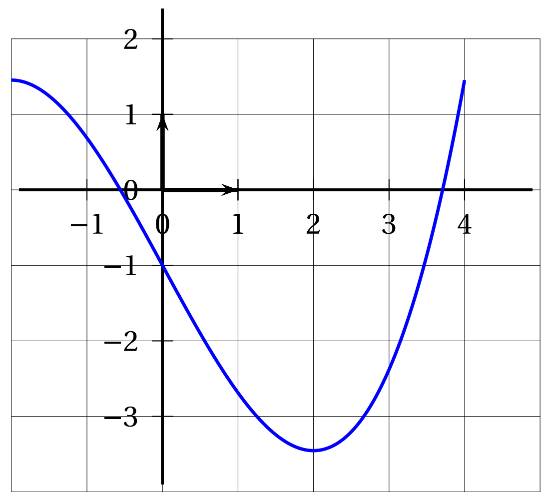
1. Pour tout nombre réel x, $\log\left(\dfrac{10^x}{5}\right)$ est égal à :

- $\dfrac{x}{5}$
- $x - \log(5)$
- $x\log(2)$
- $log(x) + 2$

2. $\dfrac{1}{243}$ est solution de l'équation $3x^a = 1$ donc a vaut :

- 0
- 1,5
- 5
- $\dfrac{1}{5}$

3. La courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$ est donnée ci-dessous.



Alors :

- $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-2\ ;\ -1]$
- $f'(0) > 0$
- $f'(x) < 0$ sur $[-2\ ;\ 2]$
- $f'(3) < 0$

4. ABC est un triangle tel que AB = 2 ; AC = 4 et $\widehat{\text{BAC}} = 60°$. La distance BC est égale à :

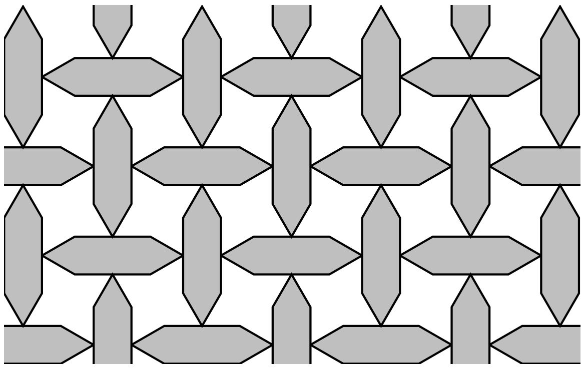
- 3
- 3,5
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{12}$

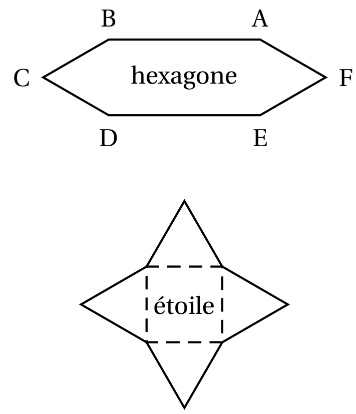
5. $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace dans lequel les points E, F et G ont pour coordonnées : E(1 ; 0 ; 0), F(0 ; 2 ; 0) et G(0 ; 0 ; 1). On a :

- $\overrightarrow{\text{EF}} \cdot \overrightarrow{\text{EG}} = 1$
- $\overrightarrow{\text{EF}}$ et $\overrightarrow{\text{EG}}$ sont orthogonaux
- EF = EG
- EF = 2EG

EXERCICE 3 — 7 points

Le pavage représenté ci-dessous à gauche a été réalisé à l'aide des deux motifs « hexagone » et « étoile » représentés ci-dessous à droite.





Partie A : Les motifs

1. L'hexagone ABCDEF est constitué d'un rectangle ABDE tel que AB = 4 cm et BD = 2 cm.

   Les triangles AEF et BCD sont équilatéraux et situés à l'extérieur du rectangle ABDE.

   Déterminer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{CDE}$.

2. L'étoile est constituée d'un carré et de triangles équilatéraux dont les côtés mesurent 2 cm.

   Justifier qu'il ne reste pas d'espace vide lorsque l'on place des hexagones identiques à l'hexagone ABCDEF autour de cette étoile comme dans le pavage représenté ci-dessus à gauche.

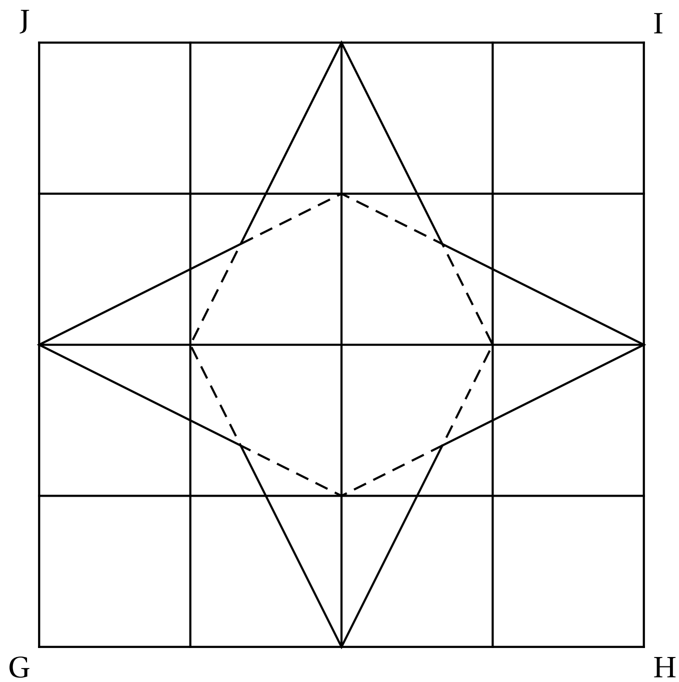
Partie B : Étude du pavage

On représentera, sur **l'annexe 2 à rendre avec la copie**, *les points et les vecteurs permettant de définir les transformations du plan utilisées dans les questions de cette partie.*

1. Donner une transformation du plan qui permet de passer du motif « hexagone » numéroté 1 au motif « hexagone » numéroté 2 ?
2. On peut passer du motif « hexagone » numéroté 1 au motif « hexagone » numéroté 3 en appliquant successivement deux transformations du plan. Quelles sont ces transformations ?
3. Par quelle transformation du plan passe-t-on du motif « étoile » numéroté 4 au motif « étoile » numéroté 5 ?

Partie C : Construction d'une autre étoile en perspective centrale

L'étoile représentée ci-dessous est inscrite dans un carré GHIJ situé dans un plan horizontal.
Cette étoile est construite à partir du quadrillage régulier représenté en pointillés dans la figure ci-dessous. Cette étoile est différente de celle du motif « étoile ».



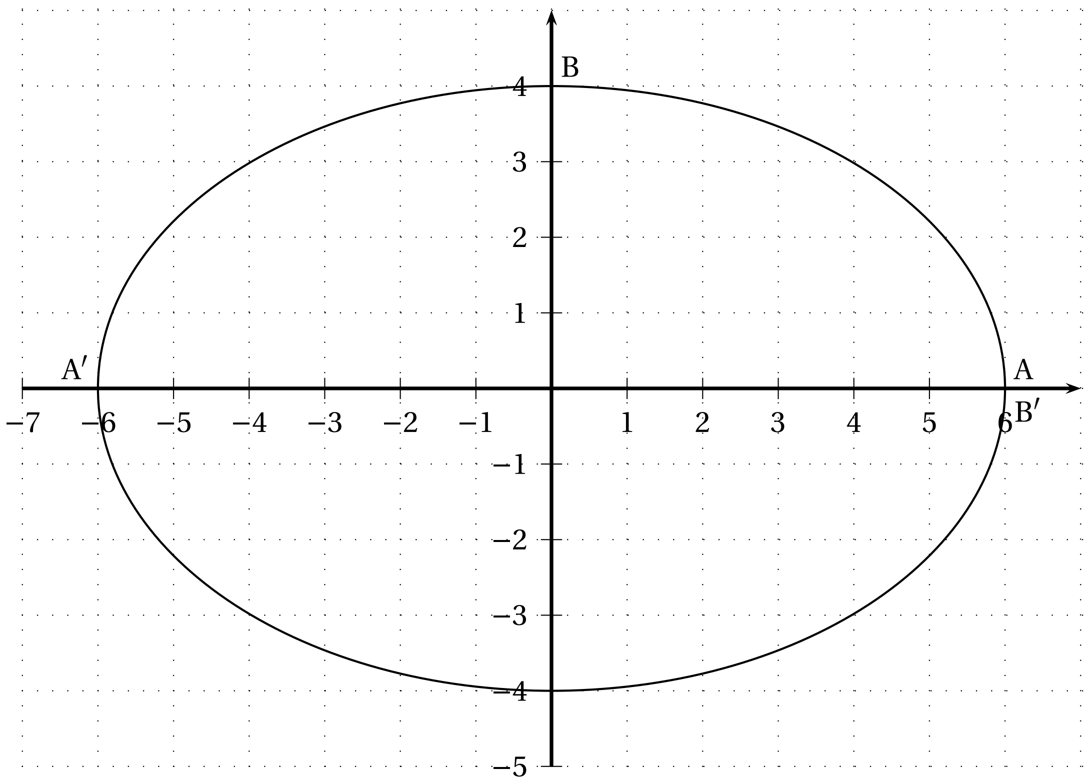
Dans **l'annexe 2 à rendre avec la copie**, on a commencé à représenter en perspective centrale le carré GHIJ. Les points g, h, i, ... représentent respectivement les points G, H, I...
On complétera au fur et à mesure la représentation de la figure sur l'annexe 2 à rendre avec la copie. On laissera apparents les traits de construction.

1. Le segment [GH] se situe dans un plan frontal. Construire le point de fuite principal w.
2. Les droites (HI) et (GD) sont parallèles. Que peut-on en déduire pour les droites (hi) et (gj) qui les représentent dans la représentation en perspective centrale ?

   Placer le point j.
3. On appelle M le centre du carré GHIJ. Construire l'image m du point M.
4. Construire l'image du quadrillage régulier du carré GHIJ.
5. Représenter l'étoile. On repassera en couleur le contour de l'étoile.

Annexe 1 à rendre avec la copie

EXERCICE 1

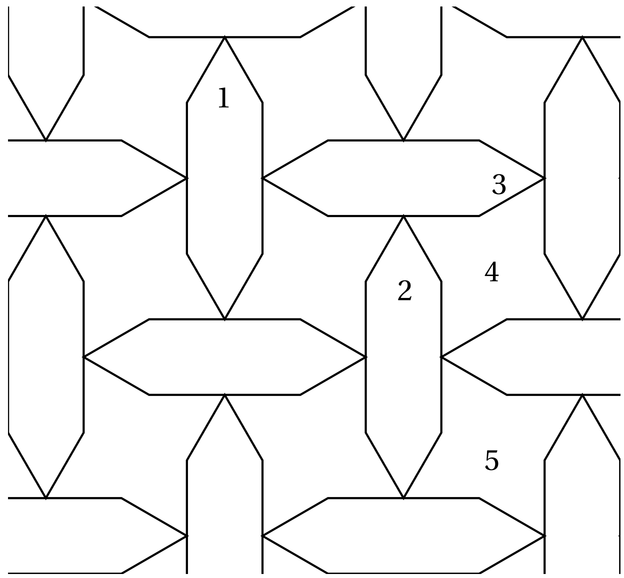


EXERCICE 1 - Partie B - 4. d.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							

Annexe 2 à rendre avec la copie

EXERCICE 3 - Partie B



EXERCICE 3 - Partie C