∽ Baccalauréat Métropole 21 juin 2013 ∾
Sciences et technologies du design et des arts appliqués

EXERCICE 1 **10 points**

Partie A : Étude de la fonction associée au profil de l'assise

1. A$(-4~;~4)$ appartient à $\mathscr{P}$ se traduit par : $4 = 16a - 4b + 4$ ou encore $16a - 4b = 0$ et enfin $4a - b = 0$.

   B$(3~;~9,25)$ appartient à $\mathscr{P}$ se traduit par : $9,25 = 9a + 3b + 4$ soit $9a + 3b = 5,25$ et en simplifiant par 3 : $3a + b = 1,75$. On a donc :

   $\left\{\begin{array}{rcl} 4a - b &=& 0\\ 3a + b &=& 1,75\end{array}\right. \Rightarrow 7a = 1,75$ (en ajoutant membres à membres). Finalement $a = \dfrac{1,75}{7} = 0,25$.

   En remplaçant dans la première équation $b = 4a = 4 \times 0,25 = 1$.

   L'équation de $\mathscr{P}$ est donc $y = 0,25x^2 + x + 4$.

2. **a.** On a $f'(x) = 2 \times 0,25x + 1 = 0,5x + 1$.

   Or $0,5x + 1 > 0$ si $0,5x > -1$ ou $x > -2$.

   De même $f'(x) < 0$ si $x < -2$.

   Donc :

   - $f'(x) > 0$ sur $[-2~;~3]$: la fonction est croissante sur cet intervalle ;
   - $f'(x) < 0$ sur $[-4~;~-2]$: la fonction est décroissante sur cet intervalle ;
   - $f'(-2) = 0$. Le point $(-2~;~3)$ est le minimum de la fonction.

   D'autre part $f(-4) = 4 - 4 + 4 = 4$ et $f(3) = 2,25 + 3 + 4 = 9,25$ (on retrouve les coordonnées de A et de B.

   On a donc le tableau de variations suivant :

x	-4		-2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$9,25$

   b.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	3,25	3	3,25	4	5,25	7	9,25

   c. Voir l'annexe à la fin.

Partie B : Étude de la fonction associée au profil des pieds du fauteuil

1. **a.** On calcule : $g'(x) = -3 \times \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{8}x^2 = \dfrac{3}{8}\left(4 - x^2\right) = -\dfrac{3}{8}\left(x^2 - 4\right) = -\dfrac{3}{8}(x+2)(x-2)$.

   b. La dérivée est un trinôme qui s'annule en -2 et 2 qui est négatif sauf entre -2 et 2 :

   - $f'(x) > 0$ sur $[-2~;~2]$
   - $f'(x) < 0$ sur $[-4~;~-2]$ et sur $[2~;~3]$.

   D'où le tableau de variations de g :

x	-4		-2		2		$3{,}5$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$9{,}25$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$3,5$
$g(x)$	4	0,875	0	0,625	2	3,375	4	3,125	1,9

3. On a vu que $f(-4) = 4$ et on calcule $g(-4) = -\dfrac{1}{8}(-4)^3 + \dfrac{3}{2} \times (-4) + 2 = 8 - 6 + 2 = 4$.
Conclusion : les courbes représentatives des fonctions f et g ont en commun le point A$(-4\ ;\ 4)$.

4. Voir l'annexe à la fin.

Partie C : Étude de l'indice de confort

1. a. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{P}$ en A est le nombre dérivé $f'(-4) = 0,5 \times (-4) + 1 = -1$.
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{P}$ en B est le nombre dérivé $f'(3) = 0,5 \times 3 + 1 = 2,5$.

b. (AC) a pour coefficient directeur $\dfrac{4 - 0,5}{-4 - (-0,5)} = \dfrac{3,5}{-3,5} = -1$.
La droite (AC) contient le point A de la parabole et a pour coefficient directeur le nombre dérivé $f'(-4)$: c'est donc la tangente à $\mathscr{P}$ en A.
De même (BC) a pour coefficient directeur $\dfrac{9,25 - 0,5}{3 - (-0,5)} = \dfrac{8,75}{3,5} = 2,5$.
La droite (BC) contient le point B de la parabole et a pour coefficient directeur le nombre dérivé $f'(3)$: c'est donc la tangente à $\mathscr{P}$ en B.
Voir les deux tangentes à la fin.

2. a. Avec $\overrightarrow{\text{CB}}\,(3,5\ ;\ 8,75)$ et $\overrightarrow{\text{CA}}\,(-3,5\ ;\ 3,5)$, on a $\overrightarrow{\text{CB}} \cdot \overrightarrow{\text{CA}} = -3,5 \times 3,5 + 8,75 \times 3,5 = 3,5 \times (8,75 - 3,5) = 3,5 \times 5,25 = 18,375$.

b. On a également $\overrightarrow{\text{CB}} \cdot \overrightarrow{\text{CA}} = \text{CB} \times \text{CA} \times \cos\widehat{\text{ACB}}$.
Or $\text{CB}^2 = 8,75^2 + 3,5^2 = 88{,}8125$ d'où $\text{BC} = \sqrt{88{,}8125}$;
$\text{CA}^2 = (-3,5)^2 + 3,5^2 = 24,5$, d'où $\text{CA} = \sqrt{24{,}5}$.
On a donc en utilisant les deux écritures du produit scalaire :
$18,375 = \sqrt{88{,}8125} \times \sqrt{24{,}5} \times \cos\widehat{\text{ACB}}$, d'où $\cos\widehat{\text{ACB}} = \dfrac{18,375}{\sqrt{88{,}8125 \times 24,5}} \approx 0{,}3939$.

c. La calculatrice livre :
$\alpha \approx 66,8\,°$.
L'angle est compris entre 60 et 70 °, il aura donc le label « confort ».

EXERCICE 2 **5 points**

La troisième question de cet exercice est indépendante des deux premières

1. Le triangle ABC est isocèle en C. En considérant le milieu H du côté [AB], l'are du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles AHC et BHC qui ont pour aire commune $\dfrac{AB}{2} \times CH \times \dfrac{1}{2}$.

   L'aire du triangle ABC est donc égale à $\dfrac{AB}{2} \times CH$.

   En utilisant le théorème de Pythagore dans AHC :

   $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 5^2 - 3,5^2 = 8,5 \times 1,5 = 12,75$. D'où $CH = \sqrt{12,75}$.

   L'aire du triangle ABC est donc égale à : $\dfrac{AB}{2} \times CH = \dfrac{7}{2} \times \sqrt{12,75} \approx 12,497\,5$.

2. D'après la formule d'Al Kashi : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos\widehat{ABC} = 49 + 25 - 70\cos\widehat{ABC} = 25$, soit

   $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{49}{70} = \dfrac{7}{10} = 0,7$.

   La calculatrice livre $\widehat{ABC} \approx 45,73 \approx 46$ °.

3. **a.** Les droites (OS) et (FC) perpendiculaires à (OF) sont parallèles, donc coplanaires.

   b. L'ombre de C est l'intersection C′ (dans le plan de la question précédente) des droites (SC) et (OF) : voir la figure plus bas.

   c. De même dans le plan (OSBE) l'ombre de B est B′ intersection des droites (SB) et (OE) et dans le plan (OSAD) l'ombre de A est A′ intersection des droites (SA) et (OD).

   d. L'ombre de la toile ABC est le triangle A′B′C′.

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A

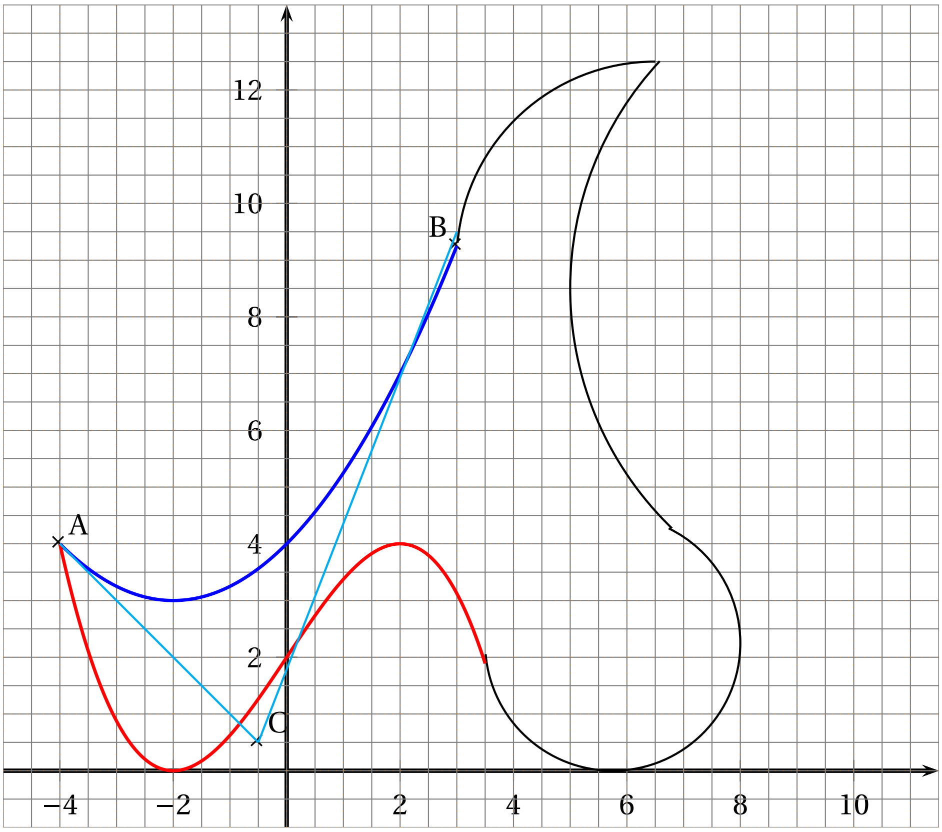
Voir à la fin.

Partie B

1. Voir à la fin.

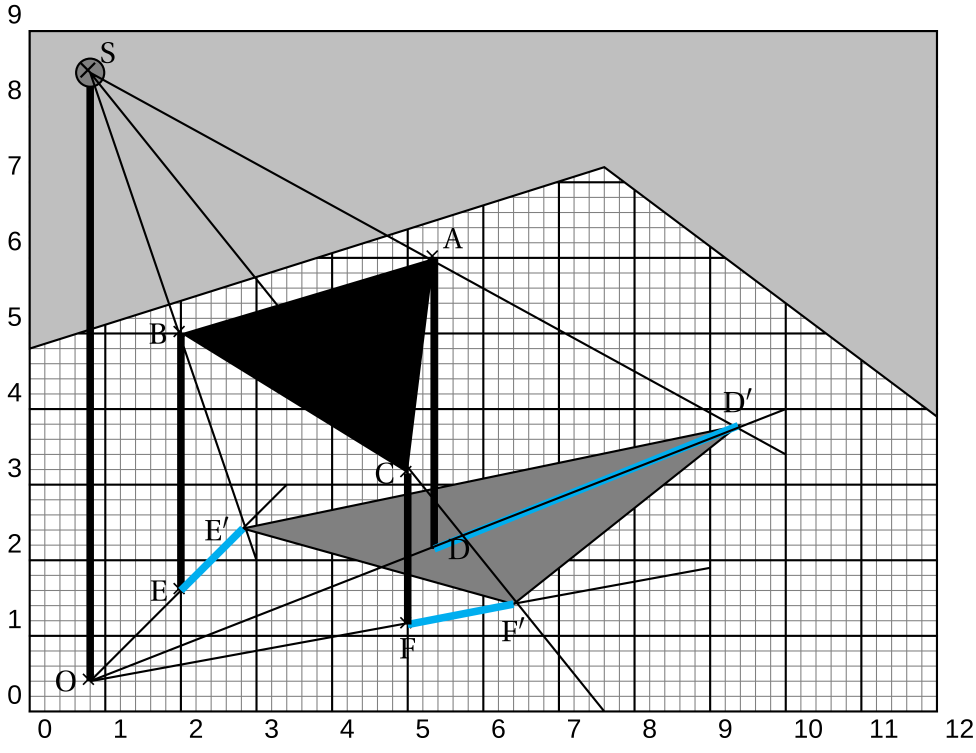
2. Voir à la fin.

Annexe 1, à compléter et à rendre avec la copie

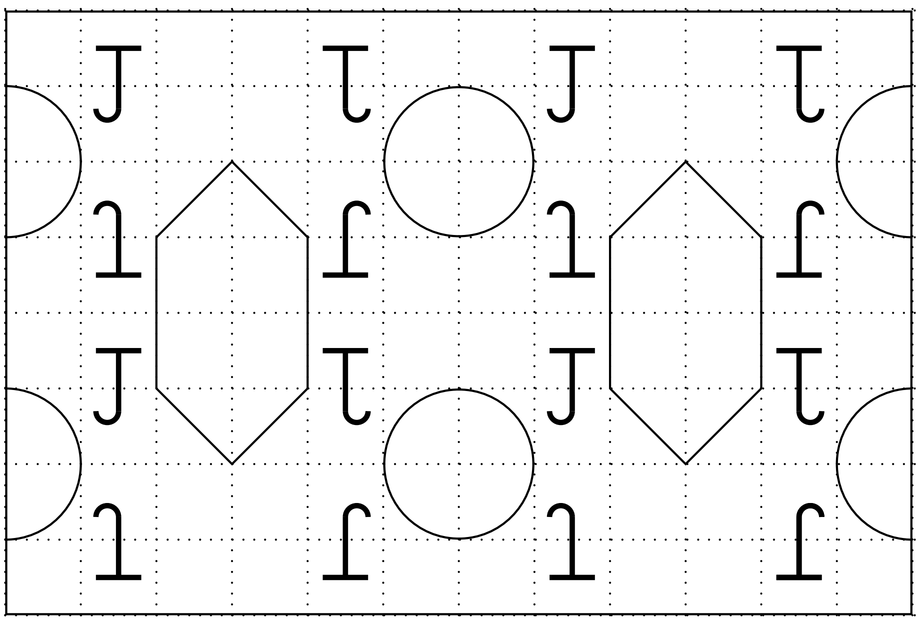


Annexe 2, à compléter et à rendre avec la copie

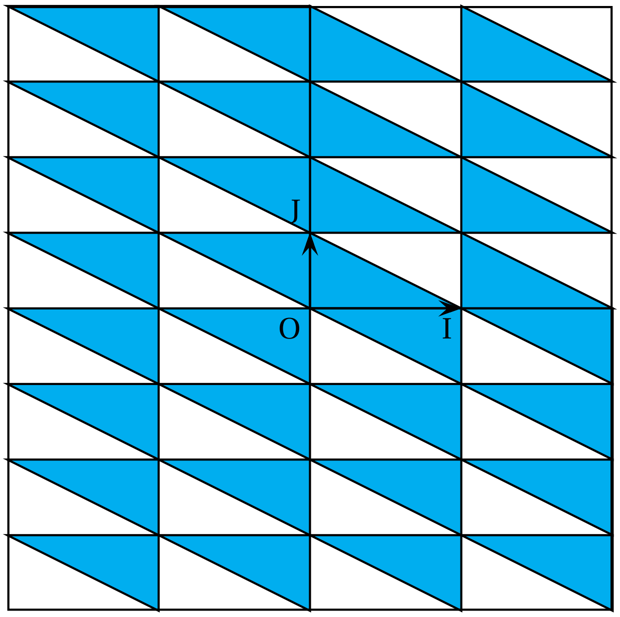
Document 1



Document 2



Exercice 3 Partie B question 1



Exercice 3 Partie B question 2