Baccalauréat STG - Mercatique - CFE - GSI
Correction Antilles-Guyane septembre 2011

EXERCICE 1 **4 points**

Monsieur Prévoyant place un capital de 3 000 euros sur un compte rémunéré à intérêts composés.
Le taux de placement est de 3 % l'an.
Tous les ans, au premier janvier, il ajoute 50 euros sur ce compte.
Soit C_n le capital, en euros, après n années de placement. On a ainsi $C_0 = 3000$.

1. Calculons C_1. La somme étant placée à 3 %, elle a été multipliée par 1,03 $C_1 = 3000 \times 1{,}03 + 50 = 3140$.
2. Déterminons C_2. $C_2 = 3140 \times 1{,}03 + 50 = 3284{,}20$
3. Pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 1{,}03C_n + 50$, car le capital à l'issue de l'année n a été multiplié par 1,03 et à ceci,il a été ajouté 50 .
4. Monsieur Prévoyant veut utiliser une feuille de calcul d'un tableur pour déterminer son capital en fonction du nombre d'années de placement.

	A	B
1	Taux de placement en %	3
2	Ajout annuel (en euros)	50
3		
4	Nombre d'années de placement	Capital en euros au bout de n années
5	0	3 000,00
6	1	3 140,00
7	2	3 284,20
8	3	3 432,73
9	4	3 585,51

Le format des cellules B5 à B9 est monétaire avec 2 décimales.

   a. Une formule à entrer en B6 qui, par recopie vers le bas, permet de compléter la plage de cellules B6 : B9 est =B5*1.03+50.

   Remarque Si l'on veut pouvoir changer le taux d'intérêt et la somme ajoutée =B5*(1+$B$1)/100)+$B$2.

   b. Le capital au bout de 4 années de placement est de 3 585,71 €. Résultat obtenu en utilisant la relation de récurrence, les calculs intermédiaires figurent dans le tableau.

EXERCICE 2 **6 points**

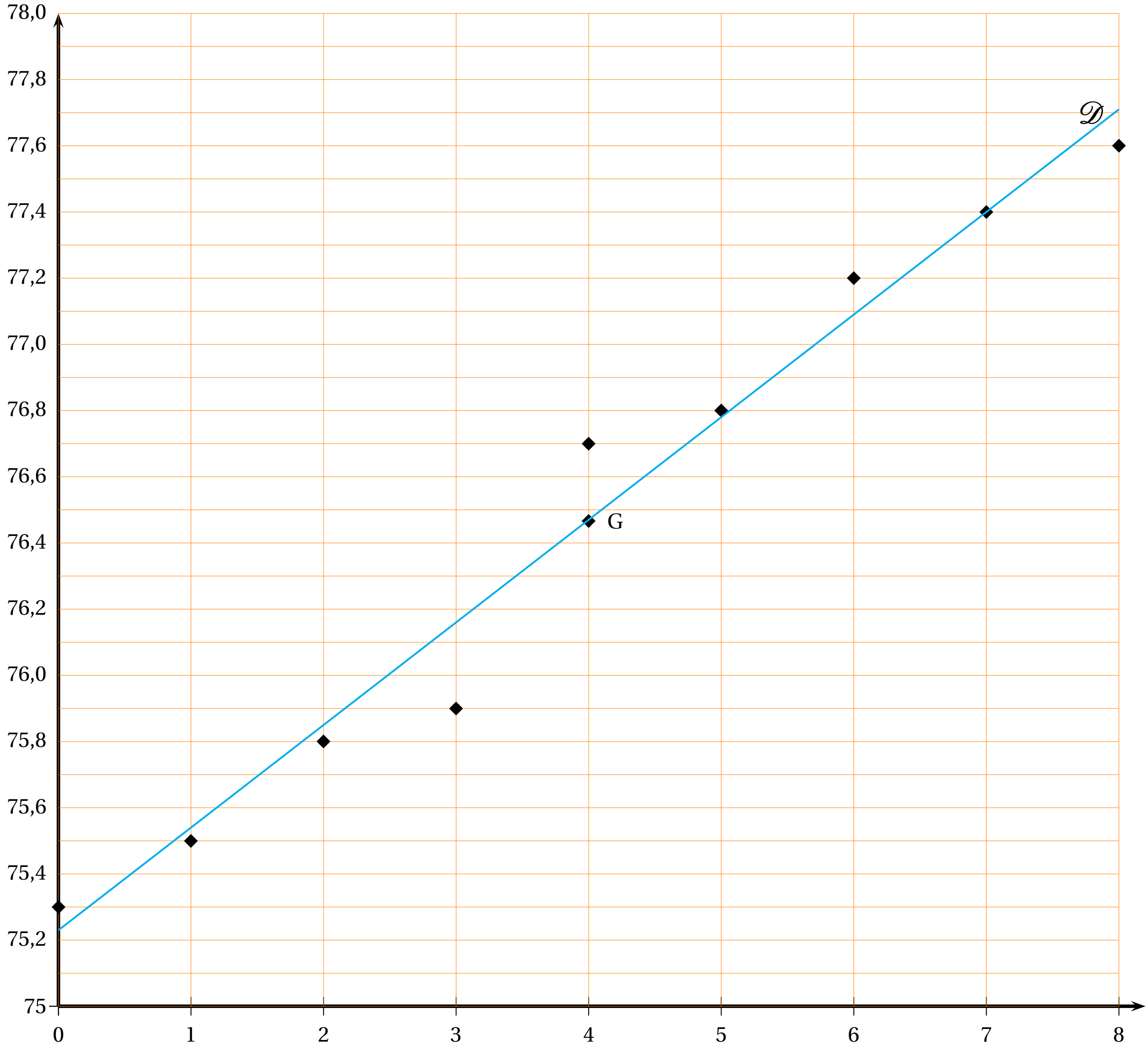
L'INSEE publie le tableau suivant, donnant l'espérance de vie à la naissance des individus de sexe masculin (hors autres critères) selon l'année de naissance.

Année de naissance	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Age moyen au décès (y_i)	75,3	75,5	75,8	75,9	76,7	76,8	77,2	77,4	77,6

1. Calculons le taux d'évolution de l'espérance de vie des hommes entre 2000 et 2008. Le taux global d'augmentation entre 2000 et 2008 est

$$\frac{\text{valeur 2008} - \text{valeur 2000}}{\text{valeur 2000}} = \frac{77{,}6 - 75{,}3}{75{,}3} \approx 0{,}0305 \approx 3{,}05\,\%$$

2. Calculons le taux d'évolution annuel moyen de l'espérance de vie des hommes entre 2000 et 2008. Entre 2000 et 2008, il y a eu huit augmentations. Si t est le taux d'augmentation moyen annuel alors $(1+t)^8 = 1{,}0305$; Il en résulte $t = 1{,}0305^{\frac{1}{8}} - 1 \approx 0{,}00376 \approx 0{,}38\,\%$.
3. Représentons le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal.



4. Calculons les coordonnées du point moyen G de cette série statistique. Le point moyen a pour coordonnées $(\overline{x}\,;\,\overline{y})$

$$\overline{x} = \frac{0+1+2+3+4+5+6+7+8}{9} = 4 \quad \overline{y} = \frac{75{,}3+75{,}5+75{,}8+75{,}9+76{,}7+76{,}8+77{,}2+77{,}4+77{,}6}{9} \approx 76{,}5$$

   Les coordonnées de G sont : $(4\,;\,76{,}5)$

5. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite $\mathscr{D}$ qui réalise un ajustement affine du nuage de points $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ obtenu par la méthode des moindres carrés est $y = 0{,}3x + 75{,}2$

   Voir la droite $\mathscr{D}$ dans le repère précédent.

6. En utilisant la droite $\mathscr{D}$, déterminons une estimation de l'espérance de vie des hommes nés en 2010. Le rang est 10. $y = 0{,}3 \times 10 + 75{,}2 = 78{,}2$.

   Un homme, né en 2010, peut estimer avoir une espérance de vie de 78,2 ans.

EXERCICE 3 **4 points**

Un magazine publie une étude comparative sur des téléphones portables proposant l'accès illimité à internet. Toutes les personnes interrogées possèdent un téléphone portable.

Parmi les personnes interrogées, 60 % ont acheté un téléphone de marque Alpha.
Parmi les personnes ayant acheté un téléphone de marque Alpha, 80 % ont choisi un accès internet illimité.
Parmi les personnes n'ayant pas acheté un téléphone de marque Alpha, 70 % ont choisi l'accès internet illimité.
On choisit une personne au hasard parmi les personnes interrogées. On appelle p la probabilité associée à cette expérience aléatoire.
La loi est l'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est $p(\text{A}) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$.
On note :

A l'événement : « le téléphone de cette personne est de marque Alpha »,

I l'événement : « le téléphone offre un accès internet illimité ».

On note $\overline{\text{A}}$ l'événement contraire de l'événement A.

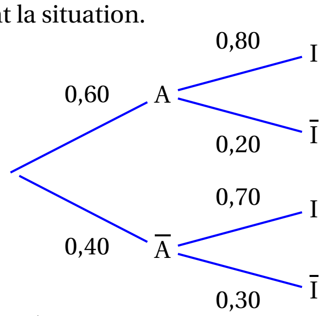
1. Déterminons

a. La probabilité $p(\text{A})$ de l'événement A est 0,6 car 60 % ont acheté un téléphone de marque Alpha.
$p\left(\overline{\text{A}}\right) = 1 - p(\text{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

b. La probabilité $p_{\text{A}}(\text{I})$ de l'événement I sachant A est 0,8, car parmi les personnes ayant acheté un téléphone de marque Alpha, 80 % ont choisi un accès internet illimité.

c. La probabilité $p_{\overline{\text{A}}}(\text{I})$ de l'événement I sachant $\overline{\text{A}}$ est 0,7 car parmi les personnes n'ayant pas acheté un téléphone de marque Alpha, 70 % ont choisi l'accès internet illimité.

2. Construisons un arbre pondéré décrivant la situation.



3. Calculons les probabilités $p(\text{A}\cap\text{I})$ et $p\left(\overline{\text{A}\cap\text{I}}\right)$ des événements $\text{A}\cap\text{I}$ et $\overline{\text{A}}\cap\text{I}$.
$p(\text{A}\cap\text{I}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{I}) = 0{,}60 \times 0{,}80 = 0{,}48$
$p(\overline{\text{A}}\cap\text{I}) = p(\overline{\text{A}}) \times p_{\overline{\text{A}}}(I) = 0{,}40 \times 0{,}70 = 0{,}28$

4. Démontrons que $p(\text{I}) = 0,76$.
$p(\text{I}) = p(\text{A}\cap\text{I}) + p(\overline{\text{A}}\cap\text{I}) = 0{,}48 + 0{,}28 = 0{,}76$

5. On sait que la personne choisie possède un téléphone avec un accès illimité à internet.
Déterminons la probabilité pour que ce téléphone soit de marque Alpha. Calculons $p_{\text{I}}(\text{A})$.
$p_{\text{I}}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{A}\cap\text{I})}{p(\text{I})} = \dfrac{0{,}48}{0{,}76} = 0{,}63$

EXERCICE 4 — 6 points

Une entreprise fabrique des tables de jardin. La production est comprise entre 0 et 30 tables par jour. Toutes les tables fabriquées sont supposées vendues.

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;\,30]$ par

$$C(x) = x^2 + 50x + 100.$$

Le coût de production, exprimé en euros, de x tables fabriquées est égal à $C(x)$.

1. Calculons le coût de production, en euros, de 10 tables. Il suffit de calculer $C(10)$. $C(10) = 10^2 + 50 \times 10 + 100 = 700$.
Le coût de fabrication de 10 tables est de 700 euros.

2. Calculons le coût unitaire, en euros, pour 10 tables produites. Nous répartissons ce coût total sur les 10 chaises ; donc le coût unitaire est de 70 euros. ($\dfrac{700}{10} = 70$)

Partie B

À chaque quantité x de tables produites, on associe le coût unitaire, $\dfrac{C(x)}{x}$, exprimé en euros.

On modélise ce coût par la fonction f, définie sur l'intervalle $[1 ; 30]$ par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 30]$ et on note f' sa fonction dérivée.
La courbe représentative de f est donnée dans le repère fourni en annexe.

1. Déterminons graphiquement une valeur approchée de $f(5)$ et de $f(25)$. Pour ce faire, lisons les ordonnées des points de la courbe d'abscisses respectives 5 et 25. $f(5) \approx 75$; $f(25) \approx 80$.
2. Graphiquement, les quantités de tables produites pour lesquelles le coût unitaire, en euros, est inférieur ou égal à 80 sont les abscisses des points pour lesquels la courbe est située en dessous de la droite d'équation $y = 80$. Les quantités appartiennent à l'intervalle $[4 ; 26]$

Partie C

1. Montrons que $f(x) = x + 50 + \dfrac{100}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 30]$.
   $f(x) = \dfrac{C(c)}{x} = \dfrac{x^2 + 50x + 100}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{50x}{x} + \dfrac{100}{x} = x + 50 + \dfrac{100}{x}$
2. Calculons $f'(x)$. $f'(x) = 1 - \dfrac{100}{x^2} = \dfrac{x^2 - 100}{x^2} = \dfrac{(x-10)(x+10)}{x^2}$.
   Nous avons bien montré que, pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 30]$, $f'(x) = \dfrac{(x-10)(x+10)}{x^2}$.
3. Puisque $x \in [1 ; 30]$ $\dfrac{x+10}{x^2} > 0$, par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 10$.
   $x - 10 > 0$ si et seulement si $x > 10$.
   $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in [1 ; 10]$, $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in [10 ; 30]$.
   Étudions les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 30]$.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ alors la fonction f est décroissante sur I ; f est donc décroissante sur $[1 ; 10]$.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I ; f est donc croissante sur $[10 ; 30]$.
   Dressons un tableau de variations.

x	1		10		30
f'		$-$	0	$+$	
Variations de f	151	$\searrow$	70	$\nearrow$	$\approx 73{,}33$

4. D'après le tableau de variations, la quantité de tables à fabriquer par jour pour que le coût unitaire soit minimal est de 10 tables.
   Le coût minimal est de 70 euros.

Annexe

À rendre avec la copie

EXERCICE 4