Baccalauréat STG Mercatique Nouvelle-Calédonie
correction 10 novembre 2011

EXERCICE 1 **4 points**

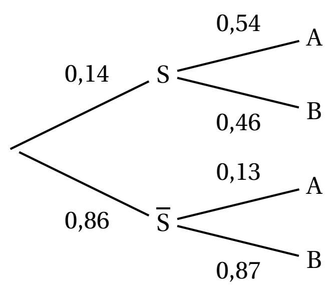
L'entreprise REPROD fabrique et commercialise deux modèles de photocopieurs : un modèle relativement bon marché (appelé « modèle ALPHA ») et un modèle plus perfectionné et un peu plus cher (appelé « BETA »).
Au début de l'année 2011, cette entreprise a réalisé une enquête auprès des personnes qui lui ont acheté un photocopieur en 2009. Le dépouillement des réponses a fait apparaître les résultats suivants :

- 14 % des clients ont fait appel au Service Après Vente durant l'année 2010. *ce qui peut se traduire par* $p(\text{S}) = 0{,}14$
- Parmi eux, 46 % avaient acheté un modèle BETA. $p_{\text{S}}(\text{B}) = 0{,}46$
- Parmi ceux qui n'ont pas fait appel au SAV, 87 % avaient acheté un modèle BETA. $p_{\overline{\text{S}}}(\text{B}) = 0{,}87$

Pour un client pris au hasard, on note :

- S l'événement : « Le client a dû faire appel au SAV » et $\overline{\text{S}}$ son contraire. $p(\overline{\text{S}}) = 1 - 0{,}14 = 0{,}86$
- A l'événement : « Le client a un modèle ALPHA » et B l'événement : « Le client a un modèle BETA » (on a évidemment : $\text{B} = \overline{\text{A}}$)

1. Construisons l'arbre pondéré :



2. L'événement $\text{S} \cap \text{B}$ est l'événement : « Le client a dû faire appel au SAV et a un modèle BETA » .
Calculons sa probabilité. $p(\text{S} \cap \text{B}) = p(\text{S}) \times p_{\text{S}}(\text{B}) = 0{,}14 \times 0{,}46 = 0{,}0644$

3. Calculons $p(\text{B}) = p(\text{S} \cap \text{B}) + p(\overline{\text{S}} \cap \text{B}) = 0{,}0644 + 0{,}86 \times 0{,}87 = 0{,}0644 + 0{,}7482 = 0{,}8126$. Nous avons bien $p(\text{B}) = 0{,}8126$.
A et B étant contraires, $p(\text{A}) = 1 - p(\text{B}) = 1 - 0{,}8126 = 0{,}1874$.

4. Déterminons $p_{\text{B}}(\text{S})$ et $p_{\text{A}}(\text{S})$.
$p_{\text{B}}(\text{S}) = \frac{p(\text{S} \cap \text{B})}{p(\text{B})} = \frac{0{,}0644}{0{,}8126} \approx 0{,}08$
$p_{\text{A}}(\text{S}) = \frac{p(\text{S} \cap \text{A})}{p(\text{A})} = \frac{0{,}14 \times 0{,}54}{01874} \approx 0{,}42$

5. Des deux modèles, le modèle B semble le plus fiable. Dans 8 % des cas, il sera fait appel au service après vente contre 42 % pour un modèle A.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

Sur la figure donnée en annexe 1 (à rendre avec la copie), on a tracé la droite d'équation

$$y = -\frac{3}{2}x + 13,5.$$

L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'inéquation $y \geqslant ax + b$ est le demi-plan situé au dessus de la droite d'équation $y = ax + b$, celle-ci incluse.

$x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ définissent le premier quadrant.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \geqslant -\frac{3}{2}x + 13,5$ est le demi-plan situé au dessus de la droite $y = -\frac{3}{2}x + 13,5$.
La partie ne convenant pas est hachurée en bleu sur l'annexe.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \geqslant -\frac{2}{3}x + 8$ est le demi-plan situé au dessus de la droite $y = -\frac{2}{3}x + 8$.
Pour la construire, choisissons deux points (0 ; 8) et (12 ; 0). La partie ne convenant pas est hachurée en cyan.

L'ensemble des points du plan M dont les coordonnées $(x\,;\ y)$ vérifient le système

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y \geqslant -\dfrac{3}{2}x + 13,5 \\ y \geqslant -\dfrac{2}{3}x + 8 \end{cases}$$

est la partie du plan non hachurée sur le dessin, les segments de droites étant incluses.

Partie B

Dans un lycée, un groupe d'élèves se charge de la distribution de pains au chocolat et de croissants lors de la récréation de dix heures. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de 108 pains au chocolat et de 96 croissants.

Deux boulangers proposent :

- l'un le lot A comprenant 12 pains au chocolat et 8 croissants ;
- l'autre le lot B composé de 8 pains au chocolat et 12 croissants.

Les lycéens décident d'acheter des lots chez les deux boulangers.

On note x le nombre de lots A achetés et y le nombre de lots B achetés.

1. Nous pouvons traduire les données du problème sous forme d'un tableau.

	Lot A x	Lot B y	minimum
pains	12	8	108
croissants	8	12	96

puis traduire ces données sous forme d'inéquations.

- contrainte liée aux nombres $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$
- contrainte liée aux pains au chocolat : $12x + 8y \geqslant 108$
- contrainte liée aux croissants : $8x + 12y \geqslant 96$

d'où le système d'inéquations

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \quad \text{à défaut } x \geqslant 0 \\ y \in \mathbb{N} \quad \text{à défaut } y \geqslant 0 \\ 12x + 8y \geqslant 108 \\ 8x + 12y \geqslant 96 \end{cases}$$

2. Montrons que le nombre de lots A et le nombre de lots B vérifient le système d'inéquations de la partie A.

L'inéquation $12x + 8y \geqslant 108$ peut aussi s'écrire $8y \geqslant -12x + 108$ ou $y \geqslant -\frac{3}{2}x + 13{,}5$.

L'inéquation $8x + 12y \geqslant 96$ peut aussi s'écrire $12y \geqslant -8x + 96$ ou $y \geqslant -\frac{2}{3}x + 8$.

En complétant par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, nous retrouvons le système d'inéquations de la partie A.

3. Un lot A coûte 12 € et un lot B coûte 10€.

a. La dépense pour x lots A et y lots B achetés s'élève à $12x + 10y$.

b. Les élèves souhaitent déterminer le couple $(x\,;\ y)$ qui permettra d'obtenir la dépense minimale. À l'aide d'un tableur, ils obtiennent la feuille de calcul donnée en annexe.

Parmi les formules suivantes, indiquons celle à saisir dans la cellule B2 afin de compléter le tableau par recopie.

Formule 1 : ~~=12*A2+10*B1~~

Formule 2 : =12*$A2+10*B$1

Formule 3 : ~~=12*A$2+10*$B1~~

c. Déterminons le couple qui permet de satisfaire la demande au moindre coût. La dépense est minimale lorsque les quantités demandées sont juste satisfaites ou un peu plus. Les deux contraintes ne peuvent être simultanément saturées puisque les coordonnées du point d'intersection ne sont pas entières. Cherchons à l'aide du graphique, les points à coordonnées entières appartenant à l'ensemble solution qui saturent une contrainte et proche du point d'intersection. Nous trouvons le point $(5\,;\,6)$. Si maintenant, nous augmentons le nombre de lots A, le nombre de lots B va diminuer et par conséquent le coût va augmenter puisqu'un lot A coûte plus qu'un lot B. Les élèves choisiront d'acheter 5 lots A et 6 lots B pour une dépense totale de 120 euros.

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A

Les questions 1 *à* 4 *constituent un Q.C.M.*

Dans le tableau ci-dessous, on donne la date de commercialisation de différentes puces de microprocesseur, et le nombre de transistors dans chacune.

Nom du processeur	4004	8086	286	386	4-6	Pentium	Pentium pro	Pentium II	Pentium III
Année de commercialisation	1971	1978	1982	1985	1989	1994	1996	1997	1999
Nombre (n_i) de transistors par puce	2 300	29 000	134 000	275 000	2 000 000	3 100 000	5 500 000	7 500 000	9 500 000

Source : Intel

1. Si on prend comme base 100 le nombre de transistors en 1989, l'indice en 1971, arrondi au millième, est :

   a. ~~86,956~~ **b.** $\boxed{0{,}115}$ **c.** ~~115~~

2. Le taux d'évolution, en pourcentage, du nombre de transistors dans une puce entre 1989 et 1999 est de :

   a. $\boxed{375\,\%}$ **b.** ~~3,75 %~~ **c.** ~~99,885 %~~

   Le taux d'évolution entre 1989 et 1999 est $\dfrac{\text{valeur de 1999} - \text{valeur de 1989}}{\text{valeur de 1989}}$.

   $\dfrac{9\,500\,000 - 2\,000\,000}{2\,000\,000} = 3{,}75$. Le taux d'évolution est de 375 %.

3. Gordon Moore, co-créateur et actuel président de la société Intel, a énoncé le principe suivant : « le nombre de transistors par puce double tous les dix-huit mois ».
   En suivant ce principe, le nombre de transistors par puce aurait été multiplié en 6 ans par :

   a. ~~8~~ **b.** $\boxed{16}$ **c.** ~~18~~

   En 6 ans, il y a quatre périodes de 18 mois. Le nombre de transistors double à chaque évolution $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$

4. Si le nombre de transistors par puce double tous les dix-huit mois, le taux moyen mensuel d'évolution, arrondi à 1 %, est égal à :

   a. ~~11,11 %~~ **b.** ~~60,10 %~~ **c.** $\boxed{4\,\%}$

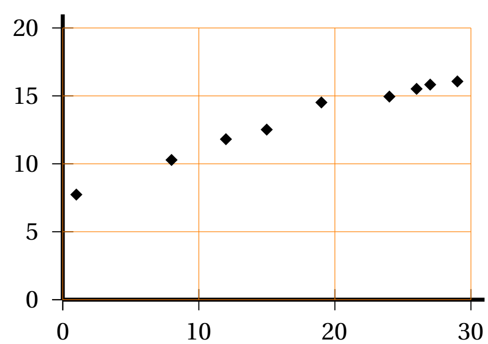
   Soit t_m est le taux mensuel moyen. Le nombre de transistors dans cette période a subi 18 évolutions. Le coefficient multiplicatif global est d'une part 2 et d'autre part $(1+t_m)^{18}$ d'où $t_m = 2^{\frac{1}{18}} - 1 = 0{,}039 \approx 4\,\%$

Partie B

On construit grâce au tableur le tableau ci-dessous, qui donne pour chaque année de commercialisation d'un nouveau produit (x_i) le logarithme népérien (y_i) du nombre n_i de transistors dans la puce.

Année de commercialisation	1971	1978	1982	1985	1989	1994	1996	1997	1999
Rang de l'année (x_i)	1	8	12	15	19	24	26	27	29
$y_i = \ln(n_i)$	7,74	10,28	11,81	12,52	14,51	14,95	15,52	15,83	16,07

On obtient alors le nuage de points ci-contre.
L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement affine.



1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est

$$y = 0{,}30x + 7{,}95$$

2. On choisit de modéliser l'évolution par la droite d'équation $y = 0,3x + 8$. Le rang de l'année corrrespondant à 2005 est 35. Déterminons l'ordonnée y du point de la droite d'abscisse 35.
$y = 0,3 \times 35 + 8 = 18,5$. Calculons le nombre n tel que $\ln n = 18,5$. Nous obtenons $n = \text{e}^{18,5} \approx 108\,254\,988$.
Le nombre de transistors de la puce commercialisée en 2005, arrondi au million, serait 108 millions.

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A

f est la fonction définie sur $[0\,;\,6]$ par :

$$f(x) = 0,5x + \text{e}^{-0,5x+1}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. **a.** Résolvons l'équation $1 - \text{e}^{-0,5x+1} = 0$.

$$\begin{aligned} 1 - \text{e}^{-0,5x+1} &= 0 \\ \text{e}^{-0,5x+1} &= 1 \\ \ln\left(\text{e}^{-0,5x+1}\right) &= \ln(1) \\ -0,5x + 1 &= 0 \\ -0,5x &= -1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\{2\}$

b. Résolvons l'inéquation $1 - \text{e}^{-0,5x+1} \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} 1 - \text{e}^{-0,5x+1} &\geqslant 0 \\ \text{e}^{-0,5x+1} &\leqslant 1 \\ \ln\left(\text{e}^{-0,5x+1}\right) &\leqslant \ln(1) \\ -0,5x + 1 &\leqslant 0 \\ -0,5x &\leqslant -1 \\ x &\geqslant 2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[2\,;\,+\infty[$

2. **a.** Déterminons la dérivée de f. $f'(x) = 0,5 + \left(-0,5\text{e}^{-0,5x+1}\right)$.
D'où $f'(x) = 0,5\left(1 - \text{e}^{-0,5x+1}\right)$.

b. D'après la question précédente, $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [2\,;\,6]$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [0\,;\,2]$.
Si pour tout $x \in \text{I}$, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I ; par conséquent f est croissante sur $[2\,;\,6]$
Si pour tout $x \in \text{I}$, $f'(x) \leqslant 0$ alors la fonction f est décroissante sur I ; donc f est décroissante sur $[0\,;\,2]$
Dressons le tableau de variations de f.

x	1		2		6
f'	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	e	$\searrow$	2	$\nearrow$	$3 + \text{e}^{-2}$

3. Complétons le tableau.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2,72	2,15	2	2,11	2,37	2,72	3,14

Partie B

Une entreprise fabrique des objets à l'aide de machines-outils. Le coût total de production pour x centaines d'objets produits est $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction de la partie A.

1. D'après le tableau de variations, f admet un minimum pour $x = 2$. Pour que le coût total de production soit minimal, il faut produire 200 d'objets.

2. Un objet fabriqué est vendu 7 € pièce. Par conséquent, cent objets sont vendus 700 € soit 0,7 milliers d'euros.

a. On a représenté sur l'annexe 2, la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la droite d' équation $y = 0,7x$.

Graphiquement, l'entreprise réalise un bénéfice lorsque la courbe représentative des coûts est en dessous de la courbe des recettes.

Nous lisons $x > 3$. Elle réalise un bénéfice si elle vend plus de 300 objets.

b. Calculons le bénéfice pour 600 objets vendus. Pour ce faire, calculons $\mathrm{R}(6) - f(6)$ où R est la fonction définie par $\mathrm{R}(x) = 0,7x$. $0,7 \times 6 - f(6) = 4,200 - 3,135 = 1,065$.

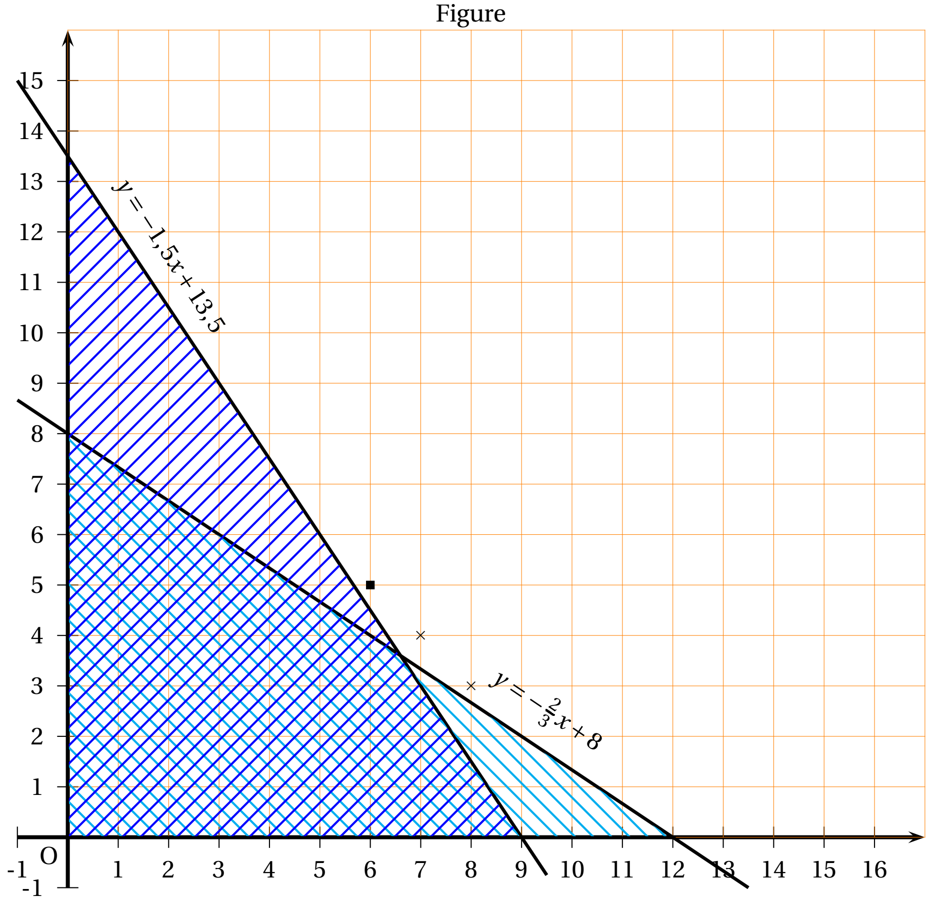
Le bénéfice, arrondi à l'euro, pour la vente de 600 objets est de 1 065 euros.

ANNEXE 1

À rendre avec la copie

Exercice 2

Figure



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
3	1	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102	112
4	2	24	34	44	54	64	74	84	94	104	114	124
5	3	36	46	56	66	76	86	96	106	116	126	136
6	4	48	58	68	78	88	98	108	118	128	138	148
7	5	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
8	6	72	82	92	102	112	122	132	142	152	162	172
9	7	84	94	104	114	124	134	144	154	164	174	184
10	8	96	106	116	126	136	146	156	166	176	186	196
11	9	108	118	128	138	148	158	168	1178	188	198	208
12	10	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220

Exemple de lecture : la dépense pour l'achat de 3 lots A et 6 lots B est de 96 euros.

ANNEXE 2

Exercice 4