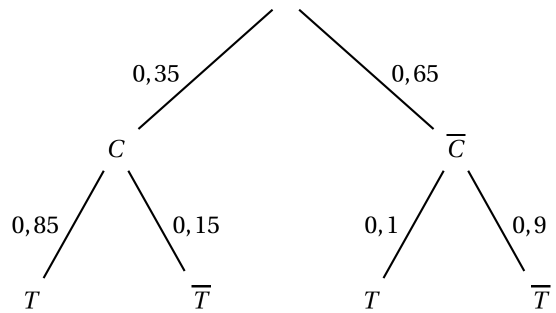
Corrigé du baccalauréat STG Mercatique Polynésie septembre 2009

EXERCICE 1 **6 points**

1. $P_C(T) = \dfrac{1190}{1400} = \dfrac{119}{140} = \dfrac{17}{20} = 0,85$.

   $P_{\overline{C}}(T) = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

2. **a.**



   b. $p(C \cap T) = p_C(T) \times p(C) = 0,85 \times 0,35 = 0,2975$.

   c. Il faut calculer $p(T)$.
   Or $p\left(\overline{C} \cap T\right) = p\left(\overline{C}\right) \times p_{\overline{C}}(T) = 0,65 \times 0,1 = 0,065$.
   D'où :
   $p(T) = p\left(\overline{C} \cap T\right) + p(C \cap T) = 0,065 + 0,2975 = 0,3625$.

   d. $p(C) \times p(T) = 0,35 \times 0,3625 = 0,126875$ et
   $p(C \cap T) = 0,2975$.
   Comme $p(C) \times p(T) \neq p(C \cap T)$, les évènements C et T ne sont pas indépenants.

3. On a $p_T(C) = \dfrac{p(T \cap C)}{p(T)} = \dfrac{0,2975}{0,3625} = \dfrac{2975}{3625} = \dfrac{119}{145} \approx 0,82069 \approx 0,82$ au centième près.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Augmenter chaque année de 4 %, revient à multiplier par $1 + \dfrac{4}{100} = 1,04$.
   On a donc pour tout naturel n, $a_{n+1} = 1,04a_n$. La suite (a_n) est géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $a_0 = 20000$.
   On sait qu'alors $a_n = a_0 \times q^n = 20000 \times 1,04^n$
   2020 correspond à $n = 12$, donc $a_{12} = 20000 \times 1,04^{n12} \approx 32020,644 \approx 32020,64$ (€).

2. Puisqu'on ajoute chaque année la somme fixe de 1 025 €, la suite (b_n) est arithmétique de raison $r = 1025$ et de premier terme $b_0 = 20000$.
   On sait qu'alors $b_n = b_0 + nr = 20000 + 1025n$.
   2020 correspond à $n = 12$, donc $b_{12} = 20000 + 1025 \times 12 = 32300$ (€).

3. On a $a_{13} = 20000 \times 1,04^{13} \approx 33301,47$
   et $b_{13} = 20000 + 1025 \times 13 = 33325$;
   $a_{14} = 20000 \times 1,04^{14} \approx 34633,52$
   et $b_{14} = 20000 + 1025 \times 14 = 34350$
   $n = 14$ correspond à 2022 année où pour la première fois $b_n < a_n$.

EXERCICE 3 **4 points**

1. f est dérivable sur $[0,5\ ;\ 6]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 2 - 4 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-4}{x} = \dfrac{2(x-2)}{x}$.
2. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$.
Donc $x - 2 > 0 \iff x > 2$, alors $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $[2\ ;\ 6]$;
$x - 2 < 0 \iff x < 2$, alors $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur $[0,5\ ;\ 2]$.
3. On vient de voir que $f'(2) = 0$: le coefficient directeur de la tangente à la la courbe $\mathscr{C}$ est égal au nombre dérivé $f'(2) = 0$; donc la tangente est horizontale. Une équation de T est $y = 2 \times 2 - 3 - 4\ln(2) = 1 - 4\ln(2)$.
4. Sur $[0,5\ ;\ 2]$ la fonction décroît de $f(0,5) = 1 - 3 - 4\ln(0,5) = -2 + 4\ln(2) \approx 0,772$ à $f(2) = 1 - 4\ln(2) \approx -1,772$.
Sur $[2\ ;\ 6]$, la fonction croît de $f(2) = 1 - 4\ln(2) \approx -1,772$ à $f(6) = 9 - 4\ln(6) \approx 1,833$.
Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une seule solution x_0 sur l'intervalle $[2\ ;\ 6]$.
La calculatrice donne :
$f(4,5) \approx -0,02$ et $f(4,5) \approx 0,1$, donc $4,5 < x_0 < 4,6$.
$f(4,51) \approx -0,005$ et $f(4,52) \approx 0,006$.
Conclusion : $x_0 \approx 4,51$.
5. $f(1) = -1$ et $f'(1) = -2$.
Une équation de T_1 est de la forme $y = -2x + b$.
Or $x = 1 \Rightarrow y = -1 = -2 \times 1 + b \iff b = 1$.
Une équation de T_1 est donc $y = -2x + 1$.
Voir la figure.

EXERCICE 4 **6 points**

1. On a représenté sur le graphique fourni en annexe 2, à rendre, les droites D_1, D_2 et D_3 d'équations respectives

$$y = -\frac{1}{2}x + 30, \quad y = -3x + 90 \quad \text{et} \quad y = 21.$$

   a. Voir le graphique à la fin.

   b. On a $x + 2y \leqslant 60 \iff y \leqslant 30 - \dfrac{1}{2}x$;
   $3x + y \leqslant 90 \iff y \leqslant -3x + 90$;
   $2y \leqslant 42 \iff y \leqslant 21$.
   Tous les points à coordonnées naturelles appartenant à la région non hachurée sont des points dont les cooordonnées sont solutions du système (les points des droites étant compris).

   c.
   – Le couple $(5\ ;\ 25)$ n'est pas solution (car $25 > 21$).
   – Pour $x = 20$, la plus grande valeur possible pour y est $y = 20$.

2. **a.** $B = 50x + 70y$.

   b. On a donc $-\dfrac{1}{2}x + 30 = -3x + 90 \iff -x + 60 = -6x + 180 \iff 5x = 120 \iff x = 24$; d'où $y = -3 \times 24 + 90 = 18$.
   Le couple $(24\ ;\ 18)$ est solution de S'.

   c. Pour $x = 0$, $y = 15$ et pour $x = 35$, $y = -10$. Voir le dessin.

d. Les droites représentant les bénéfices sont parallèles.

D'après la question précédente, elles ont toutes pour coefficient directeur $-\dfrac{5}{7}$. D'après la résolution du système le couple solution correspond au bénéfice maximal, donc pour $x = 24$ et $y = 18$.

La droite correspondante à ce bénéfice a pour équation $y = -\dfrac{5}{7}x + b$; de $x = 24$ on en déduit $y = -\dfrac{5}{7} \times 24 + b = 18 \iff b = 18 + \dfrac{120}{7} = \dfrac{126 + 120}{7} = \dfrac{246}{7}$.

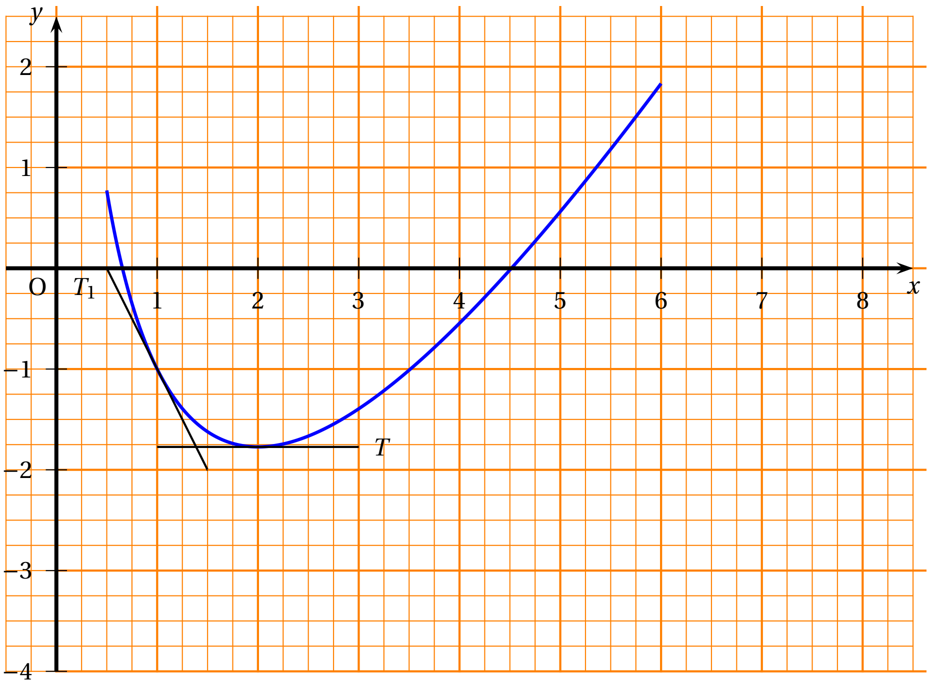
Donc la droite a pour équation $y = -\dfrac{5}{7}x + \dfrac{246}{7}$ ou encore en multipliant par 70 :

$70y = -50x + 2\,460 \iff 50x + 70y = 2\,460$. Le bénéfice est donc de $2\,460$(€).

Vérification : Le bénéfice est alors égal à :

$50 \times 24 + 70 \times 18 = 1\,200 + 1\,260 = 2\,460$(€).

ANNEXE 1 à rendre avec la copie



ANNEXE 2 à rendre avec la copie