Correction du sujet 2009

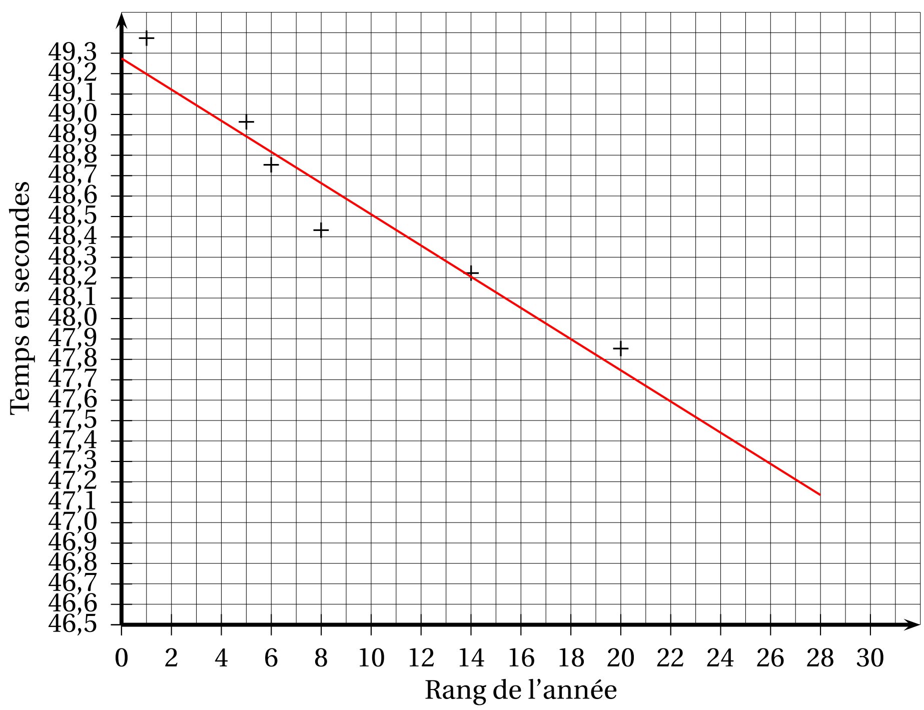
Exercice 1

Notons G l'événement : « Le favori gagne sa partie ». On a p(G)=0,9.

1. La probabilité que « Le favori » perde son match est $1-0,9=\boxed{0,1}$ $\left(p\left(\overline{G}\right)=1-p(G)\right)$
2. Notons G_n l'événement « Le favori gagne le n^{e}match ».
   La probabilité que « Le favori » gagne ses deux premiers matches est égale à $p\left(G_1\cap G_2\right)=p\left(G_1\right)\times\left(p(G_2\right)=0,9^2=\boxed{0,81}$
   (car les résultats des matches successifs sont indépendants).
3. Les résultats successifs étant indépendants, la probabilité qu'il gagne le match suivant sachant qu'il a gagné son premier match est égale à la probabilité qu'il gagne.
   $p_{G_1}\left(G_2\right)=p\left(G_2\right)=\boxed{0,9}$.
4. « Le favori » ne joue qu'un ou deux matches s'il perd à la première ou à la deuxième partie : c'est l'événement contraire du précédent : « Il a gagné ses deux premiers matches ».
   La probabilité cherchée est donc $1-0,81=\boxed{0,19}$.

Exercice 2

1. (a) À l'aide la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés est : $\boxed{y=-0,0764x+49,274}$.
   (b) Voir graphique à la fin de l'exercice
   (c) 2008 correspond à un rang égal à 28 : on remplace x par 28.
   $-0,764\times 28+49,274\approx 46,96$.
   $\boxed{\text{Avec cet ajustement, on peut envisager un record du monde en 2008 de 46,96 s}}$.
2. (a) Le taux d'évolution entre 1981 et 2000 est : $\dfrac{47,84-49,36}{49,36}\approx -0,0307$, soit une baisse d'environ 3,07 %.
   (b) Petite erreur de formulation de la question : de 1981 à 2000, cela fait 20 ans, mais 19 changements d'années.
   Notons t le taux moyen annuel d'évolution du record : on a, en utilisant les coefficients multiplicateurs :
   $(1-t)^{19}=1-0,0307=0,693$. On en déduit : $1-t=0,693^{\frac{1}{19}}$ d'où $t=1-0,693^{\frac{1}{19}}\approx 0,001639\approx\boxed{0,164\,\%}$
   (c) Avec ce modèle, on obtiendrait en 2008 un record de : $49,36\times\left(1-\dfrac{0,164}{100}\right)^{27}\approx\boxed{47,22}$ s.
3. L'écart entre la valeur réelle du record et la valeur estimée est de 9 centièmes de seconde avec la première méthode et de 17 centièmes avec la seconde méthode.
   C'est la première méthode qui a donné la meilleure approximation.



Exercice 3

Partie A

1. En B3, on doit taper = B2 * 1,035
2. En C3, on doit taper = C2 * 1,02 + 170

Partie B

1. (a) Pour tout n, on a : $b_{n+1} = 1,035 b_n$ donc (b_n) est une suite $\boxed{\text{géométrique}}$ de raison $q = 1,035$ et de premier terme $b_0 = 10\,000$.

   (b) On en déduit que : $b_n = b_0 q^n = \boxed{10\,000 \times 1,035^n}$.

   (c) Pour $n = 10$, on trouve $b_{10} = 10\,000 \times 1,035^{10} \approx \boxed{14\,105,99 \text{ €}}$.

2. (a) $c_2 = 1,02 c_1 + 170 = 1,02 \times 10\,370 + 170 \approx \boxed{10\,747,4 \text{ €}}$.

   (b) On admet que $c_{n+1} = 1,02 c_n + 170$.
   Alors $c_{10} = 1,02 c_9 + 170$ et $c_9 \approx 13\,609,21$ (donné dans le tableau) d'où : $c_{10} \approx \boxed{14\,051,39 \text{ €}}$.

3. $b_{10} > c_{10}$. L'offre la plus intéressante émane de la banque B (pour un investissement (de 10 ans).

Exercice 4

1. Au bout de trois ans, il aura $800 \times 1,045^3 \approx \boxed{912,93 \text{ €}}$.
2. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,18]$ par $f(x) = 800 \times 1,045^x$.

   (a) $f(x) = 800 \times \mathrm{e}^{x\ln(1,045)}$; on peut voir f comme $800\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x\ln(1,045)$.
   En dérivant, on obtient : $f' = 800\left(\mathrm{e}^u\right)' = 800 \times u'\mathrm{e}^u$ avec $u'(x)\ln(1,045)$.
   Par conséquent : $f'(x) = 800\ln(1,045)\mathrm{e}^{x\ln(1,045)}$ donc $\boxed{f'(x) = 500\ln(1,045) \times 1,045^x}$.

   (b) 800>0 ; 1,045>1 donc $\ln(1,045) > 0$; $1,045^x = \mathrm{e}^{x\ln(1,045)} > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,18]$.
   On en déduit que f est croissante sur $[0\,;\,18]$

3. (a) Graphiquement, on trouve : $f(4,5) \approx \boxed{975}$

   (b) Le capital aura doublé lorsqu'il dépassera 1 600 €. Graphiquement, on trouve qu'il faut avoir $\boxed{x \geqslant 15,8}$ environ.
   Il faudra que Thomas attende environ seize ans pour voir son capital doubler.