✿ Baccalauréat STG C.G.R.H. Polynésie ✿ 5 septembre 2013 Correction

EXERCICE 1 **8 points**

La société Bonbon.com commercialise des confiseries.
On utilise une feuille de calcul d'un tableur pour observer l'évolution du chiffre d'affaires en milliers d'euros de la société Bonbon.com depuis 2006.

	A	B	C	D
1	Année	Rang de l'année x_i	Chiffre d'affaires (en milliers d'euros) y_i	Taux d'évolution annuel du chiffre d'affaires
2	2006	0	166	
3	2007	1	164	−1,20 %
4	2008	2	170	
5	2009	3		
6	2010	4	186	
7	2011	5	191	
8	2012	6	199	

Partie A *Les taux d'évolution seront exprimés en pourcentages et arrondis à* 0,01 % *près*

1. Calculons le taux d'évolution du chiffre d'affaires entre 2007 et 2008.
   Le taux d'évolution t est défini par $t = \dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $t = \dfrac{170-164}{164} \approx 0{,}036\,585$.
   Le taux d'évolution du chiffre d'affaires entre 2007 et 2008, exprimé en pourcentage est environ 3,66 %.

2. Sachant que le chiffre d'affaires entre 2009 et 2010 a augmenté de 8,14 %, calculons le chiffre d'affaires en 2009 arrondi au millier d'euros.

   À un taux d'évolution de 8,14 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,081 4. Le chiffre d'affaires en 2010 est de 186 milliers d'euros.

   $x \times 1{,}081\,4 = 186$, d'où $x = \dfrac{186}{1{,}081\,4} \approx 171{,}999\,3$.

   Le chiffre d'affaires en 2009 est d'environ 172 milliers d'euros.

3. Dans la feuille de calcul reproduite ci-dessus, les cellules de la colonne D sont au format pourcentage. Une formule à saisir dans la cellule D3 pour obtenir, par recopie vers le bas, les taux d'évolution successifs est :

   =(C3-C2)/C2 ou =($ C3−$ C2)/ $ C2.

4. **a.** Calculons le taux d'évolution du chiffre d'affaires entre 2006 et 2012.
   $\dfrac{199-166}{166} \approx 0{,}198\,795$.
   Le taux d'évolution du chiffre d'affaires entre 2006 et 2012 est environ 19,88 %.

   b. Déterminons le taux moyen annuel d'évolution du chiffre d'affaires de 2006 à 2012.
   Si nous appelons T le taux global d'évolution, le coefficient multiplicateur associé est $(1+T)$. Soit t_m le taux moyen d'évolution. Entre 2006 et 2012, le chiffre d'affaires a subi six évolutions, par conséquent le chiffre d'affaires de 2006 a été multiplié par $(1+t_m)^6$. Nous avons alors $(1+T) = (1+t_m)^6$ d'où $t_m = (1+T)^{\frac{1}{6}} - 1$.
   Il en résulte $t_m = 1{,}198\,8^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0{,}030\,68$.
   Le taux moyen d'évolution du chiffre d'affaires entre 2006 et 2012 est environ +3,07 %.

Partie B

La société souhaite estimer le chiffre d'affaires pour les prochaines années au moyen d'une approximation affine.
On admet dans cette partie que le chiffre d'affaires de l'année 2009 s'élevait à 172 milliers d'euros.

1. Le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ correspondant aux colonnes B et C du tableau ci-dessus est tracé ci-dessous.

2. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients à 0,01 près est

   $y = 6{,}04x + 160{,}18$.

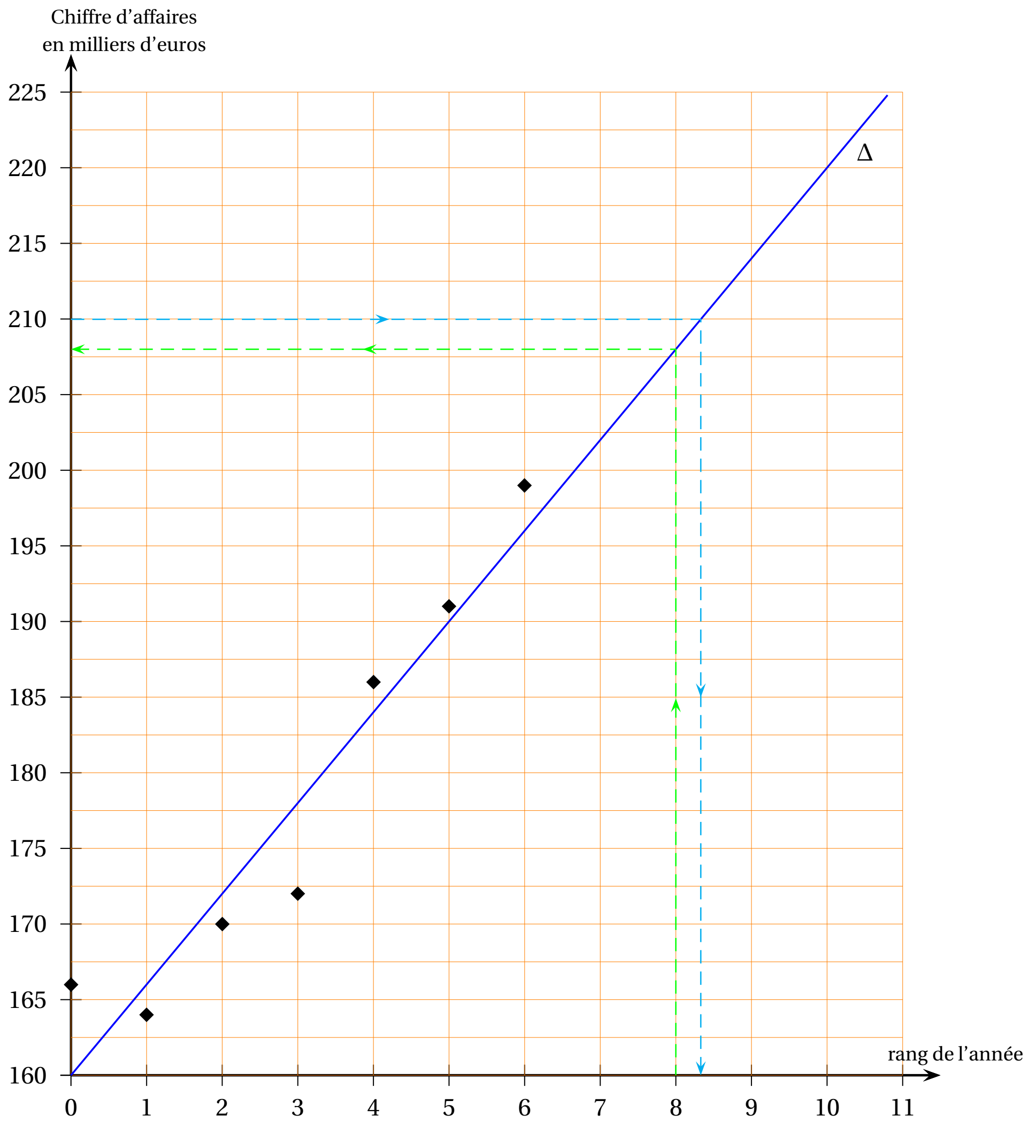
3. Dans les questions suivantes on choisit comme droite d'ajustement la droite Δ d'équation $y = 6x + 160$.

a. À l'aide de cet ajustement, calculons une estimation du chiffre d'affaires en 2014. Le rang de l'année est 8, remplaçons dans l'équation de la droite x par 8.

$y = 6 \times 8 + 160 = 208$.

b. La droite Δ est tracée dans le repère de la question 1.

c. Par lecture graphique, l'année à partir de laquelle le chiffre d'affaires dépassera 210 milliers d'euros est 2015. Nous lisons sur le graphique le rang de l'année à partir de laquelle l'ordonnée du point de la droite est supérieure ou égale à 210 soit 9.



Exercice 2 **7 points**

Une entreprise fabrique et commercialise un alliage métallique. Chaque mois, elle peut produire jusqu'à 10 tonnes de cet alliage et en vend toute la production.

Partie A - Étude du coût total et de la recette

Le coût total de production de x tonnes de l'alliage, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C dont l'expression est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 135$ où x appartient à l'intervalle $[0 ; 10]$.
La courbe Γ, représentant la fonction C dans un repère du plan, est donnée en annexe.

1. Estimons par lecture graphique :

a. le coût total d'une production de 4 tonnes ;
Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 soit 200.
Le coût total de production de 4 tonnes est d'environ 200 milliers d'euros.

b. la quantité correspondant à un coût total de production de 600 milliers d'euros.
Nous lisons l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 600 soit environ 9 tonnes

2. Déterminons par le calcul :

a. le coût total de production de 6 tonnes de l'alliage. Calculons $C(6)$.
$C(6) = 6^3 - 6 \times 6^2 + 24 \times 6 + 135 = 144 + 135 = 279$.
Le coût total de production de 6 tonnes est 279 milliers d'euros.

b. le coût moyen de production d'une tonne lorsque l'entreprise produit 6 tonnes. Lorsque l'entreprise produit 6 tonnes, elle dépense 279 milliers d'euros. Cette dépense est répartie sur chaque tonne $\dfrac{279}{6} = 46{,}5$ donc le coût moyen dans ces conditions, est de 46,5 milliers d'euros.

3. Après une étude de marché, le prix de vente de l'alliage produit a été fixé à 60 milliers d'euros la tonne.

a. La recette pour la vente de 5 tonnes d'alliage est de 300 milliers d'euros $60 \times 5 = 300$.

b. On note R la fonction qui modélise la recette, exprimée en milliers d'euros, pour x tonnes vendues.
L'expression de $R(x)$ en fonction de x est alors $R(x) = 60x$.

c. La fonction R est représentée sur l'intervalle $[0\,;\,10]$, dans le même repère que la courbe Γ sur l'annexe.

d. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la droite représentant la recette est au dessus de la courbe Γ. Nous lisons : x appartient à l'intervalle $[3\,;\,\approx 8{,}4]$.

Partie B - Étude algébrique du bénéfice

On note B la fonction qui modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

1. Montrons que l'expression de $B(x)$, lorsque x appartient à l'intervalle $[0\,;\,10]$ est : $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135$.
Le bénéfice est la différence entre les recettes et les coûts.
$B(x) = 60x - \left(x^3 - 6x^2 + 24x + 135\right) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135$.
Nous obtenons le résultat attendu.

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Déterminons $B'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$.
$B'(x) = -(3x^2) + 6(2x) + 36 = -3x^2 + 12x + 36$

3. On admet que $B'(x)$ peut s'écrire $B'(x) = (x+2)(18-3x)$.
Étudions le signe de $B'(x)$. x étant positif, $x+2$ est strictement positif par conséquent le signe de $B'(x)$ est celui de $18-3x$ ou de $6-x$.
Sur $\mathbb{R}$, $6 - x > 0 \iff x < 6$. Il en résulte : si $x \in [0\,;6[$, $B'(x) > 0$ ou si $x \in]6\,;\,10]$, $B'(x) < 0$.
Étudions les variations de B sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.
$B'(x) \geqslant 0$ si $x \in [0\,;\,6]$ donc B est croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ alors la fonction f est décroissante sur I.
$B'(x) \leqslant 0$ si $x \in [6\,;\,10]$ donc B est décroissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

x	0		6		10
$B'(x)$		+	0	−	
Variations de B	−135	↗	81	↘	−175

4. En lisant le tableau de variations, la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal est de 6 tonnes.

EXERCICE 3 **5 points**

Une plateforme de téléchargement légal propose des films et des albums de musique que les internautes peuvent acquérir soit par souscription à un abonnement, soit par achat occasionnel.

Lors de son bilan annuelle gérant de la plateforme constate que :

- 35 % des téléchargements ont été effectués par des abonnés ;
- parmi les téléchargements effectués par des abonnés, 28 % concernent un film ;
- parmi les téléchargements effectués lors d'achats occasionnels, 56 % concernent un album de musique.

Le gérant de la plateforme choisit au hasard le relevé d'un téléchargement dans le bilan annuel. On note :

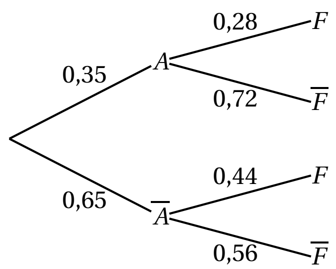
A l'évènement « le téléchargement a été effectué par un abonné »

F l'évènement « le téléchargement concerne un film »,

$\overline{A}$ l'évènement contraire de A

$\overline{F}$ l'évènement contraire de F.

1. $P_A(F) = 0{,}28$ car parmi les téléchargements effectués par des abonnés, 28 % concernent un film.
2. Complétons l'arbre de probabilités ci-dessous correspondant à la situation.



3. La probabilité de l'évènement « le téléchargement a été effectué par un abonné et concerne un film. » est notée $P(A \cap F)$. $P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F) = 0{,}35 \times 0{,}28 = 0{,}098$.
4. Montrons que la probabilité que le téléchargement concerne un film est égale à $0,384$. Calculons $P(F)$.

   $P(F) = P(A) \times P_A(F) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(F) = 0{,}098 + 0{,}65 \times 0{,}44 = 0{,}098 + 0{,}286 = 0{,}384$.

   Le résultat est bien celui attendu.
5. La probabilité que le téléchargement ait été effectué par un abonné, sachant qu'il concerne un film est notée $P_F(A)$.

   $P_F(A) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}098}{0{,}384} \approx 0{,}255$.
6. Les évènements A et F sont indépendants si $P(A \cap F) = P(A) \times P(F)$.

   $P(A \cap F) = 0{,}098$; $P(A) \times P(F) = 0{,}35 \times 0{,}384 = 0{,}134$.

   L'égalité n'étant pas vérifiée, les évènements ne sont pas indépendants.

ANNEXE DE L'EXERCICE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE