Durée : 3 heures

Correction de Baccalauréat STG — Mercatique, CFE, GSI Antilles-Guyane 20 juin 2013

EXERCICE 1 **4 points**

1. La probabilité de l'évènement A est : $p(\text{A}) = \dfrac{54}{150} = \boxed{0,36}$ (**réponse a ;**)
2. La probabilité de l'évènement $A \cap R$ est : $p(\text{A} \cap \text{R}) = \dfrac{42}{150} = \boxed{0,28}$ (**réponse b.**)
3. La probabilité de l'évènement $A \cup R$ est :
   $p(\text{A} \cup \text{R}) = p(\text{A}) + p(\text{R}) - p(\text{A} \cap \text{R}) = \dfrac{54}{150} + \dfrac{105}{150} - \dfrac{42}{150} = \boxed{\dfrac{117}{150}}$ (**réponse b.**)
4. La probabilité $P_R(A)$ est : $\dfrac{42}{105} = \boxed{0,4}$ (**réponse c.**).
   On peut aussi calculer $\dfrac{p(\text{A} \cap \text{R})}{p(\text{R})} = \dfrac{\frac{42}{150}}{\frac{105}{150}} = \dfrac{42}{105}$

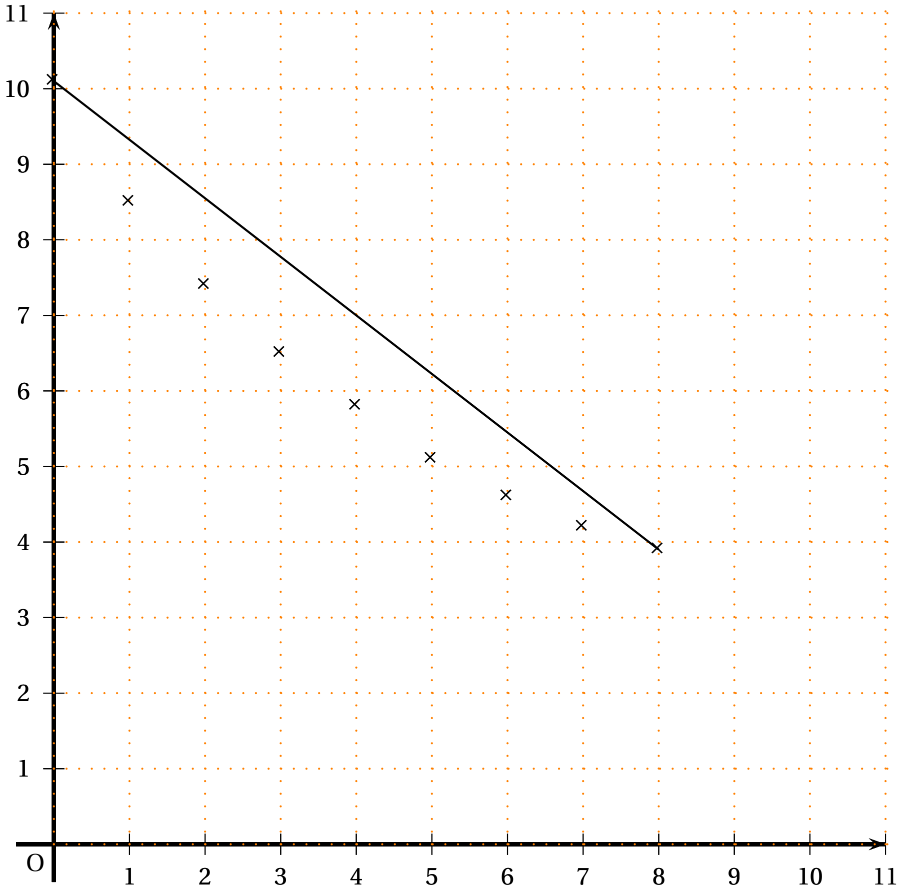
EXERCICE 2 **6 points**

Le tableau ci-dessous représente le prix d'un même objet en fonction de l'année entre 2003 et 2011.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix de l'objet en euros : y_i	10,1	8,5	7,4	6,5	5,8	5,1	4,6	4,2	3,9

1. **Ajustement affine**
   a. L'équation réduite est de la forme $y = ax + b$.
   a est le coefficient directeur : $a = \dfrac{3,9 - 10,1}{8 - 0} = \dfrac{-7,2}{8} = -0,775$.
   L'ordonnée à l'origine est $b = 10,1$ puisque la droite passe par le point de coordonnées $(0\,;\ 10,1)$.
   L'équation cherchée est donc $\boxed{y = -0,775x + 10,1}$.

   b. Tracé :



c. On choisit la droite (D) comme droite d'ajustement affine de y en x.
2013 correspond à $x = 10$: on trouve $-0,075 \times 10 + 10,1 = 2,35$.
Avec cette estimation, le prix en 2013 sera de $\boxed{2,35\text{ €}}$.

2. Ajustement inverse

a. On note $z = \dfrac{1}{y}$. Reproduire, puis compléter le tableau ci-dessous ; on arrondira les résultats au millième :

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_I = \dfrac{1}{y_i}$	$\dfrac{1}{10,1} \approx 0,099$	0,118	0,135	0,154	0,172	0,196	0,217	0,238	0,256

b. À la calculatrice, on trouve comme équation de la droite d'ajustement de z en x : $\boxed{z = 0,020x + 0,097}$.

c. Pour cette question, on décide de prendre : $y = \dfrac{1}{0,02x + 0,1}$.

Pour $x = 10$: $y = \dfrac{1}{0,02 \times 10 + 0,1} = \dfrac{1}{0,3} = \dfrac{10}{3} \approx 3,33$. À l'aide de cet ajustement, une nouvelle estimation du prix de l'objet en 2013 est $\boxed{3,33\text{ €}}$.

3. Ajustement « moyen »

a. Le taux d'évolution global du prix entre 2003 et 2011 est :
$\dfrac{3,9 - 10,1}{10,1} = -\dfrac{6,2}{10,1} \approx -0,6139$, soit environ $\boxed{-61,39\,\%}$.
Soit t le taux annuel moyen entre 2003 et 2011.
On a $(1+t)^8 = 1 - 0,6139 = 0,3861$ donc $1 + t = 0,3861^{\frac{1}{8}}$ d'où
$t = 0,3861^{\frac{1}{8}} - 1 \approx -0,11215434183043$, soit environ $\boxed{-11,21\,\%}$.
Le taux annuel moyen correspond bien à une baisse de 11,21 %.

b. En supposant que ce taux se maintienne, le prix en 2013 sera :
$3,9 \times \left(1 - \dfrac{11,21}{100}\right)^2 \approx 3,07$.
En suivant ce modèle, le prix en 2013 sera de $\boxed{3,07\text{ €}}$.

4. Comparaison
En 2013, le prix réel de l'objet est de 3,30 €. L'ajustement inverse donne un prix de 3,33 €, donc c'est l'ajustement inverse qui donne la meilleure approximation.

EXERCICE 3 **5 points**

1. a. Le coefficient multiplicateur est $1 + \dfrac{4}{100} = 1,04$.
On en déduit $u_1 = u_0 \times 1,04 = 150\,000 \times 1,04 = \boxed{156\,000}$.

b. Pour tout n, on a $u_{n+1} = 1,04u_n$; la suite (u_n) est **géométrique**, de raison $q = 1,04$ et de premier terme $u_0 = 150\,000$.
On en déduit : $u_n = u_0 q^n$ donc $\boxed{u_n = 150\,000 \times 1,04^n}$.

c. On veut $u_n \geqslant 250\,000$ donc $150\,000 \times 1,04^n \geqslant 250\,000$
donc $1,04^n \geqslant \dfrac{250\,000}{150\,000} = \dfrac{5}{3}$.
On en déduit $\ln(1,04^n) \geqslant \ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$, d'où $n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1,04)} \approx 13,02$.
Comme n est entier, il faut que $\boxed{n \geqslant 14}$.
Paul disposera donc d'au moins 250 000 € dans 14 ans, soit en **2027**.

2. a. En 2015, Paul possèdera $164000 \times 1,04 + 8000 = \boxed{178\,560\text{ €}}$.

b. Dans la cellule B3, il faut taper « **=A3*4/100** ».

c. En D3, on tape « =D2 »ou « **=8000** ».
En E3, on tape « **=A3+B3+C3** »ou « **=SOMME(A3 :C3)** ».

d. En complétant le tableau, on obtient :

	A	B	C	D
1	Somme sur le compte en début d'année	Intérêt (4 % de la somme sur le compte en début d'année)	Argent économisé pendant l'année	Somme totale sur le compte en fin d'année
2	150 000	6 000	8 000	164 000
3	150 000	6 000	8 000	164 000
4	164 000	6 560	8 000	178 560
5	178 560	7 142	8000	193 702
6	193 702	7 748	8000	209 450
7	209 450	8 378	8000	225 829
8	225 829	9 033	8000	242 862
9	242 862	9 714	8000	260 576

C'est en **2020** que Paul possédera au moins 250 000 €sur son compte.

Autre façon : on considère la suite définie par $v_0 = 150000$ et $v_{n+1} = 1,04v_n + 8000$ et on calcule les termes à la calculatrice.

EXERCICE 4 **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 10]$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 30 - 24\ln(x).$$

Une entreprise fabrique des objets. Le coût unitaire (en euros) pour x centaines d'objets produits est égal à $f(x)$.

1. $f(3) \approx 6,63$; Pour 300 objets, le coût de fabrication de chaque objet est $\boxed{6,63\text{ €}}$.

2.

x	1	2	3	4	5	6	8	10
$f(x)$	29,00	13,36	6,63	4,73	6,37	11,99	28,09	54,74

3. $f'(x) = 2x - 2 - 24 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 2x - 24}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - x - 12\right)}{x}$.

$\dfrac{2(x-4)(x+3)}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - 4x + 3x - 12\right)}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - x - 12\right)}{s} = f'(x)$ donc

$\boxed{f'(x) = \dfrac{2(x-4)(x+3)}{x}}$.

4. Signe de $f'(x)$: sur $[1 ; 10]$, $x > 0$, $2 > 0$ et $x + 3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 4$, qui s'annule en 4.
On en déduit que $f'(x) < 0$ sur $[1 ; 4[$, $f'(4) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]4 ; 10]$.
Tableau de variation :

x	1		4		10
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	29	$\searrow$	$38 - 24\ln(4)$	$\nearrow$	$110 - 24\ln(10)$

5. Le coût de fabrication par objet est minimal pour **400** objets; IL est alors d'environ $\boxed{4,73\text{ €}}$ par objet.

6. La courbe représentative de la fonction! est donnée en annexe dans un repère orthogonal.

   a. On considère l'inéquation $f(x) \leqslant 20$; sur le graphique, on trace la droite d'équation $y = 20$.
   On trouve qu'on a environ $\boxed{1,5 \leqslant x \leqslant 7,2}$.

   b. On en déduit que l'entreprise est bénéficiaire lorsqu'elle vend environ **entre 150 et 720 objets**.