Durée : 4 heures

Baccalauréat STI2D/STL spécialité SPCL
Antilles-Guyane 18 juin 2015

EXERCICE 1 — 3 points

1. Le temps d'attente en minute à un péage est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$ (exprimé en min^{-1}).
   En moyenne une personne attend à ce péage :

   a. 2 min **b.** 5 min **c.** 10 min **d.** 20 min

   Le temps d'attente moyen est l'espérance mathématique de la variable aléatoire, soit $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,2} = 5$.
   Réponse b.

2. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -3 + \text{i}3\sqrt{3}$ est :

   a. $3\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ **b.** $6\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ **c.** $6\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ **d.** $-6\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$

   $|z| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

   $\arg(z) = \theta$ tel que $\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{-3}{6} &= -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{3\sqrt{3}}{6} &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ à 2π près.
   Réponse b.

3. On considère le complexe $z = \sqrt{2} - \text{i}\sqrt{2}$.
   Le nombre complexe z^2 est égal à :

   a. $z^2 = 2$ **b.** $z^2 = 4$ **c.** $z^2 = -4$ **d.** $z^2 = -4\text{i}$

   $\left(\sqrt{2} - \text{i}\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times (\text{i}\sqrt{2}) + \left(\text{i}\sqrt{2}\right)^2 = 2 - 4\,\text{i} - 2 = -4\,\text{i}$
   Réponse d.

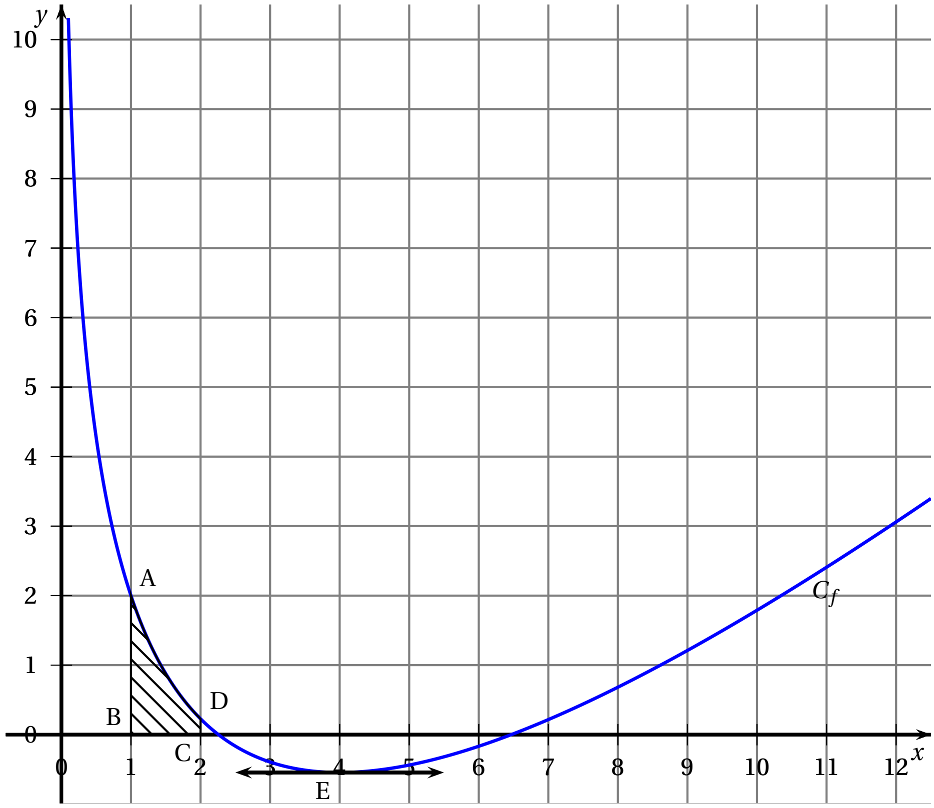
EXERCICE 2 — 5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = ax + b\ln(x) + 1$ où a et b sont deux réels.
C_f est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.
Les points A et E sont deux points de la courbe C_f.
Le point A a pour coordonnées (1 ; 2) et le point E a pour abscisse 4.
La tangente à C_f au point E est horizontale.

1. D'après le graphique, on voit que $f(1) = 2$.
   Comme la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E d'abscisse 4 est horizontale, on peut dire que $f'(4) = 0$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = a + \dfrac{b}{x}$



3. $f(x) = ax + b\ln(x) + 1$

$f(1) = 2 \iff a + b\ln(1) + 1 = 2 \iff a = 1$

$f'(x) = a + \dfrac{b}{x}$ et $a = 1$ donc $f'(x) = 1 + \dfrac{b}{x}$; $f'(4) = 0 \iff 1 + \dfrac{b}{4} = 0 \iff b = -4$

On a $a = 1$ et $b = -4$ donc $f(x) = x - 4\ln(x) + 1$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x - 4\ln(x) + 1$.

1. $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty & \Longrightarrow & \lim\limits_{x\to 0} -4\ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0 & \Longrightarrow & \lim\limits_{x\to 0} x + 1 = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

On peut en déduire que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe C_f.

2. Pour tout $x > 0$: $f(x) = x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 1$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x}$.

On résout dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0 \iff 1 - \dfrac{4}{x} > 0 \iff \dfrac{x-4}{x} > 0 \iff x > 4$ puisque $x > 0$.

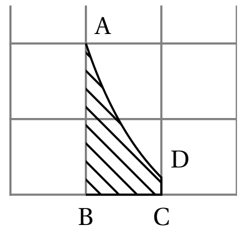
On calcule la valeur du minimum : $f(4) = 4 - 4\ln(4) + 1 = 5 - 4\ln(4) \approx -0,55$.

D'où le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$5-4\ln(4)$	↗	$+\infty$

Partie C

Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie de voiture.



La forme d'une pièce est donnée sur la figure ci-contre et correspond à la zone hachurée sur le graphique précédent.
On souhaite déterminer la mesure de l'aire de la pièce en unité d'aire.
Le point D est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2.
Les points B et C ont pour coordonnées respectives $(1\,;\,0)$ et $(2\,;\,0)$.

Soit la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $G(x) = x\ln(x) - x$.

1. $G'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$
   Donc la fonction G est une primitive de la fonction ln sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. La fonction $x \longmapsto x+1$ a pour primitive $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} + x$ donc la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - 4G(x)$ est une primitive de la fonction f.
   $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - 4(x\ln(x) - x) = \dfrac{x^2}{2} + x - 4x\ln(x) + 4x = \dfrac{x^2}{2} + 5x - 4x\ln(x)$
3. L'aire de la plaque est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
   Comme la fonction f est positive sur $[1\,;2]$, cette aire est égale à l'intégrale : $I = \displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$
   $I = \displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = F(2) - F(1) = \left(\dfrac{4}{2} + 10 - 8\ln(2)\right) - \left(\dfrac{1}{2} + 5 - 4\ln(1)\right) = 12 - 8\ln(2) - \dfrac{11}{2} = \dfrac{13}{2} - 8\ln(2)$
   $\approx 0,95$ unité d'aire.

EXERCICE 3 — 4 points

Étude de la production de plats préparés sous vide.
L'entreprise BUENPLATO produit en grande quantité des plats préparés sous vide.

1. Sur les emballages, il est précisé que la masse des plats préparés est de 400 grammes. Un plat est conforme lorsque sa masse, exprimée en gramme, est supérieure à 394 grammes.
   On note M la variable aléatoire qui, à chaque plat prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en gramme.
   On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale d'espérance 400 et d'écart type 5.
   a. La probabilité qu'un plat prélevé au hasard ait une masse comprise entre 394 et 404 grammes est $P(394 \leqslant M \leqslant 404)$. À la calculatrice, on trouve $P(394 \leqslant M \leqslant 404) \approx 0,673$.
   b. La probabilité qu'un plat soit conforme est $P(M \geqslant 394) \approx 0,885$.

2. Les plats préparés sont livrés à un supermarché par lot de 300.
On arrondit la probabilité de l'évènement « un plat préparé prélevé au hasard dans la production n'est pas conforme » à 0,12.
On prélève au hasard 300 plats dans la production. La production est assez importante pour que lion puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 300 plats, associe le nombre de plats préparés non conformes qu'il contient.

a. La probabilité qu'un plat soit non conforme est 0,12.
On prélève au hasard 300 plats dans la production. La production est assez importante pour que lion puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de plats défectueux dans le lot de 300 suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0,12$.

b. L'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui suit la loin binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ est $E(X) = np$. Donc l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $300 \times 0,12 = 36$.

c. La probabilité que dans un échantillon de 300 plats prélevés au hasard, au moins 280 plats soient conformes, est la probabilité que dans cet échantillon il y ait au plus 20 plats non conformes, c'est-à-dire $P(X \leqslant 20)$.
À la calculatrice, on trouve : $P(X \leqslant 20) \approx 0,002$.

3. Le fabricant annonce sur les étiquettes de ses produits une proportion de produits non conformes de 12 %. On prélève au hasard dans la production un échantillon de taille 1 200 dans lequel 150 plats se révèlent être non conformes.

a. La fréquence de plats non conformes dans l'échantillon prélevé est $f = \dfrac{150}{1\,200} = 0,125$.

b. Lorsque la proportion p dans la population est connue, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Comme $n = 1\,200$ et $p = 0,12$, l'intervalle est :

$$I = \left[0,12 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,12(1-0,12)}{1\,200}}\ ;\ 0,12 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,12(1-0,12)}{1\,200}}\right] \approx [0,10\,;\,0,14]$$

c. La fréquence observée dans l'échantillon est de 0,125 ; cette fréquence appartient à l'intervalle $[0,10\,;\,0,14]$ donc on peut considérer que l'échantillon est représentatif de la production du fabricant.

EXERCICE 4 ÉTUDE DU DÉFICIT D'UNE MULTINATIONALE 4 points

Le déficit d'une multinationale a été de 15 millions d'euros en 2014.
Devant l'ampleur de ce déficit, l'équipe de direction décide de prendre des mesures afin de ramener ce déficit annuel à moins de 5 millions d'euros. Jusqu'à ce que cet objectif soit atteint, cette équipe s'engage à ce que le déficit baisse de 8,6 % tous les ans. On définit la suite (u_n) de la manière suivante : on note u_n le déficit **en million d'euros** de cette multinationale lors de l'année $2014 + n$. Ainsi $u_0 = 15$.

1. **a.** Une baisse de 8,6 % revient à une multiplication par $1 - \dfrac{8,6}{100} = 0,914$. Donc $u_1 = 0,914u_0$.

b. Le déficit de la multinationale en 2016 correspond à u_2.
Pour la même raison que dans la question précédente :
$u_2 = 0,914u_1 = 0,914 \times 0,914u_0 = 0,914 \times 0,914 \times 15 \approx 12,531$ millions d'euros.

c. Une baisse de 8,6 % correspond à une multiplication par 0,914 donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,914u_n$. On sait que $u_0 = 15$.
La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 15$ et de raison $q = 0,914$.
Donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 15 \times 0,914^n$.

2. a. $0,914^n \leqslant \dfrac{1}{3} \iff \ln\left(0,914^n\right) \leqslant \ln\dfrac{1}{3}$ croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$

$\iff n \times \ln(0,914) \leqslant \ln\dfrac{1}{3}$ propriété de la fonction ln

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln\frac{1}{3}}{\ln(0,914)}$ car $\ln(0,914) < 0$

b. $\dfrac{\ln\frac{1}{3}}{\ln(0,914)} \approx 12,217$ donc l'engagement de ramener le déficit en dessous des 5 millions d'euros sera atteint au bout de 13 années, soit en $2014 + 13 = 2027$.

3. a. L'algorithme suivant renvoie l'année à partir de laquelle le déficit de cette multinationale sera ramené en dessous de 5 millions d'euros :

```
Variables
        N un entier naturel
        Q et U deux nombres réels.
Début
        N prend la valeur 0
        Q prend la valeur 0,914
        U prend la valeur 15
        Tant que U ⩾ 5 faire
            N prend la valeur N + 1
            U prend la valeur Q × U
        Fin Tant que
        Afficher N
Fin
```

b. L'algorithme suivant affiche le montant du déficit de cette multinationale chaque année jusqu'à ce que celui-ci soit ramené au-dessous de 5 millions d'euros :

```
Variables
        N un entier naturel
        Q et U deux nombres réels.
Début
        N prend la valeur 0
        Q prend la valeur 0,914
        U prend la valeur 15
        Tant que U ⩾ 5 faire
            N prend la valeur N + 1
            U prend la valeur Q × U
            Afficher U
        Fin Tant que
        Afficher N
Fin
```

4. a. La somme des déficits sur onze ans à partir de l'année 2014 comprise, c'est-à-dire : $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$, correspond à la sommme des 11 premiers termes de la suite géométrique (u_n) :
$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = u_0 \times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = 15 \times \dfrac{1 - 0,914^{11}}{1 - 0,914} \approx 109,555$ millions d'euros.

b. L'algorithme suivant donne cette somme en sortie :

Variables

N un entier naturel
Q et U deux nombres réels
S un nombre réel

Début

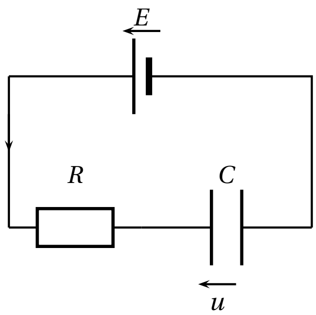
Q prend la valeur 0,914
U prend la valeur 15
S prend la valeur U
Pour N variant de 1 à 10 faire
  U prend la valeur $Q \times U$
  S prend la valeur $S + U$
Fin Pour
Afficher S

Fin

EXERCICE 5 **4 points**

On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela du circuit électrique ci-contre composé de :

- une source de tension continue E de 10 V.
- une résistance R de $10^5\ \Omega$.
- un condensateur de capacité C de 10^{-6} F.

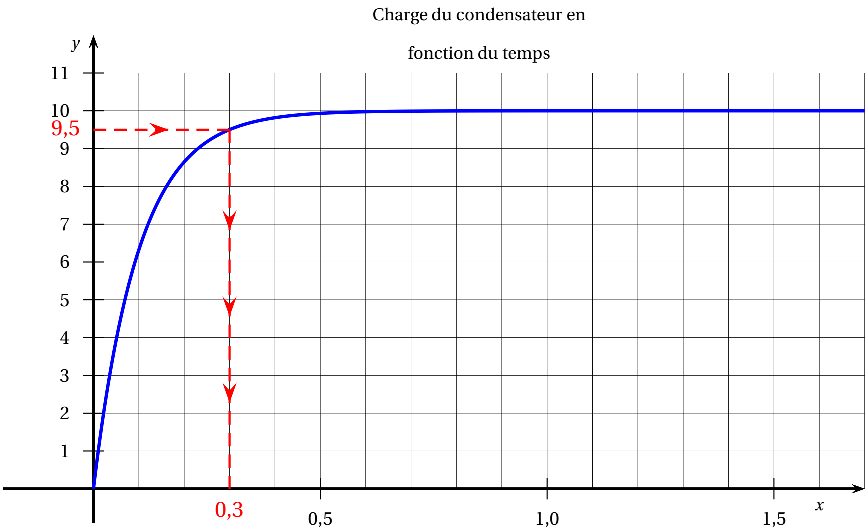


On note u la tension exprimée en volt aux bornes du condensateur. Cette tension u est une fonction du temps t exprimé en seconde.
La fonction u est définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$; elle vérifie l'équation différentielle $RCu' + u = E$ où u' est la fonction dérivée de u.

1. D'après le texte, $E = 10$, $R = 10^5$ et $C = 10^{-6}$; donc :
   $RCu' + u = E \iff 10^5 \times 10^{-6} \times u' + u = 10 \iff 10^{-1}u' + u = 10 \iff u' + 10u = 100$
2. **a.** La forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est $y = k\mathrm{e}^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où k est un réel quelconque, donc la forme générale de l'équation différentielle $u' + 10u = 100$ est $u(t) = k\mathrm{e}^{-10t} + 10$.

   b. On considère qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé.
   $$\left.\begin{array}{rcl} u(t) & = & k\mathrm{e}^{-10t} + 10 \\ u(0) & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow k\mathrm{e}^{0} + 10 = 0 \iff k = -10$$
   L'unique fonction u telle que $u(0) = 0$ est définie par $u(t) = 10 - 10\mathrm{e}^{-10t}$.

   c. On sait, d'après le cours, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-10t} = 0$; on en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 10 - 10\mathrm{e}^{-10t} = 10$ et donc que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t) = 10$.
   Cela signifie que la charge du condensateur tend vers 10 volts quand le temps t augmente indéfiniment.
3. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction u qui vient d'être obtenue à la question 2. b. avec les unités suivantes : 1 unité pour 1 seconde sur l'axe des abscisses et 1 unité pour 1 volt sur l'axe des ordonnées.
   On appelle T le temps de charge en seconde pour que $u(T)$ soit égal à 95 % de E.
   Or $E = 10$ donc 95 % de E est égal à 9,5.



a. On détermine graphiquement le temps de charge T (voir graphique).
On trouve $T \approx 0,3$ seconde.

b. On détermine le temps de charge par le calcul en résolvant l'équation $u(t) = 9,5$:

$$\begin{aligned} u(t) = 9,5 \iff 10 - 10\,\mathrm{e}^{-10t} &= 9,5 \\ \iff 0,5 &= 10\,\mathrm{e}^{-10t} \\ \iff 0,05 &= \mathrm{e}^{-10t} \\ \iff \ln(0,05) &= -10t \\ \iff -\frac{\ln(0,05)}{10} &= t \end{aligned}$$

La valeur arrondie à 10^{-4} de $-\dfrac{\ln(0,05)}{10}$ est 0,299 6.

4. En conservant les valeurs de C et de E, on obtient l'équation différentielle $R \times 10^{-6}u' + u = 10 \iff u' + \dfrac{10^6}{R}u = \dfrac{10^6}{R} \times 10$

La forme des solutions est $u(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{10^6}{R}t} + 10$; comme $u(0) = 0$, on déduit que $k = -10$.
On résout l'équation $u(t) = 9,5$:

$$\begin{aligned} u(t) = 9,5 \iff 10 - 10\,\mathrm{e}^{-\frac{10^6}{R}t} &= 9,5 \\ \iff 0,5 &= 10\,\mathrm{e}^{-\frac{10^6}{R}t} \\ \iff 0,05 &= \mathrm{e}^{-\frac{10^6}{R}t} \\ \iff \ln(0,05) &= -\frac{10^6}{R}t \\ \iff -\frac{R}{10^6}\ln(0,05) &= t \end{aligned}$$

Donc le temps de charge est proportionnel à la résistance ; il suffit de doubler la valeur de la résistance pour que le temps de charge soit multiplié par deux.