Durée : 4 heures

Baccalauréat STI 2D/STL
Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014

EXERCICE 1 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 définis par :

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

1. Déterminer l'écriture exponentielle de z_1.
2. Déterminer l'écriture algébrique de z_2.
3. Démontrer que $z_1 \times z_2 = 2z_3$.
4. En déduire l'écriture algébrique de z_3.
5. En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Un groupe agricole vend des sachets de graines donnant des plantes résistantes aux maladies. Le directeur de ce groupe affirme que 92 % des sachets sont efficaces et donnent des plantes résistantes. Dans cet exercice, les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.

1. On prélève au hasard un échantillon de 100 sachets.
   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence de sachets efficaces sur un échantillon de taille 100.
   b. Dans le prélèvement de 100 sachets, 88 donnent des plantes résistantes. Peut-on rejeter l'hypothèse du directeur ?
2. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sachets, associe le nombre de sachets donnant des plantes résistantes. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,92$.
   a. Déterminer l'espérance et l'écart type de X (arrondi à 0,01 près).
   b. La variable aléatoire X peut être approchée par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 92 et d'écart type 2,7.
   En utilisant la variable aléatoire Y, calculer la probabilité que le nombre de sachets donnant des plantes résistantes soit compris entre 89 et 94, c'est-à-dire calculer $P(89 \leqslant Y \leqslant 94)$.

EXERCICE 3 **5 points**

L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. II peut cependant être dangereux lorsqu'on le reçoit en grande quantité.
On considère un échantillon d'une population de noyaux d'iode 131 comportant 10^6 noyaux au début de l'observation. On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de 8,3 %.
On note u_n le nombre de noyaux de cet échantillon au bout de n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.

1. Calculer u_1 puis u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Déterminer à partir de combien de jours la population de noyaux aura diminué au moins de moitié.
Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode 131.

5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n et u sont des nombres
Initialisation :	Affecter la valeur 0 à n
	Affecter la valeur 10^6 à u
Traitement :	Tant que $u > \dfrac{10^6}{2}$
	$\quad n$ prend la valeur $n+1$
	$\quad u$ prend la valeur $u \times 0,917$
	Fin tant que
Sortie :	Afficher n

a. À quoi correspond la valeur n en sortie de cet algorithme ?

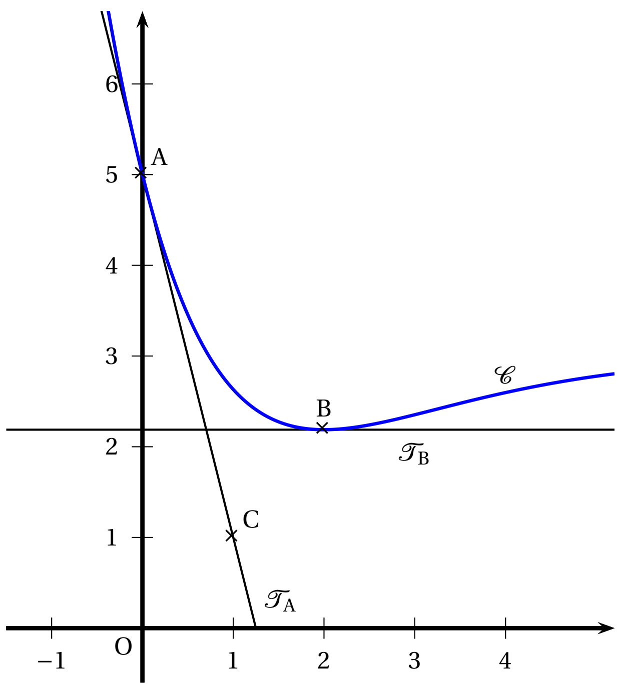
b. Si on programme cet algorithme, quel résultat affiche-t-il ?

c. Pour le Césium 137, le nombre de noyaux diminue chaque année de 2,3 %.
Quelles modifications faut-il apporter à l'algorithme précédent pour trouver la demi-vie du césium 137 sachant que la population au départ est de 10^8 noyaux ?

EXERCICE 4 **7 points**

Dans tout l'exercice, on désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A $(0 ; 5)$ et par le point B d' abscisse 2.
La tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe au point A passe par le point C$(1 ; 1)$ et la tangente $\mathscr{T}_B$ au point B est horizontale.



PARTIE A :

Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Une bonne réponse rapporte $0,5$ *point.*
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponses n'enlève ni ne rapporte aucun point. On notera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. La valeur de $f(0)$ est :

a. -4 **b.** 4 **c.** 1,2 **d.** autre réponse

2. La valeur de $f'(0)$ est :

a. -4 **b.** 4 **c.** 1,2 **d.** autre réponse

3. La valeur de $f'(2)$ est :

a. 0 **b.** 2,1 **c.** 3 **d.** autre réponse

4. Un encadrement de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par des entiers naturels est :

a. $3 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4$ **b.** $5 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 7$ **c.** $2 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 5$ **d.** $0 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$

PARTIE B

La fonction f représentée dans la PARTIE A est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(-x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} + 3.$$

1. On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est 3. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f et on admet que pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

a. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(x^2 + 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} + 3x.$$

Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. On considère le domaine $\mathcal{D}$ du plan limité par la courbe $\mathcal{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

a. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

b. Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ au centième.