Baccalauréat STI 2D/STL
Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014 Correction

EXERCICE 1 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 définis par :

$$z_1 = 1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\quad \text{et}\quad z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

1. Déterminons l'écriture exponentielle de z_1.
   L'écriture exponentielle d'un nombre complexe est $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où ρ est son module et θ son argument.
   $\rho = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ et θ est tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ par conséquent $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
2. Déterminons l'écriture algébrique de z_2.
   $z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})$.
   $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Démontrons que $z_1 \times z_2 = 2z_3$.
   $z_1 \times z_2 = \rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$.
   Par conséquent $z_1z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2z_3$.
4. Écrivons l'écriture algébrique de z_3. $z_3 = \cos(\frac{\pi}{12})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{12})$.
5. Calculons alors $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
   $2z_3 = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.
   $z_3 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
   $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.
   Nous en déduisons donc
   $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Un groupe agricole vend des sachets de graines donnant des plantes résistantes aux maladies. Le directeur de ce groupe affirme que 92 % des sachets sont efficaces et donnent des plantes résistantes. Dans cet exercice, les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.

1. On prélève au hasard un échantillon de 100 sachets.
   a. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence de sachets efficaces sur un échantillon de taille 100.
   Nous avons $n = 100$ $p = 0{,}92$. Par conséquent, $n > 30$, $np > 5$ et $np(n-p) > 5$. L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % est : $\left[p-1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p+1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$.
   $\left[0{,}92-1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}92\times 0{,}08}{100}}\ ;\ 0{,}92+1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}92\times 0{,}08}{100}}\right] = [0{,}87\ ;\ 0{,}97]$.
   b. Dans le prélèvement de 100 sachets, 88 donnent des plantes résistantes. Nous pouvons accepter l'hypothèse du directeur car dans ce lot, la fréquence de plantes résistantes 0,88 appartient à l'intervalle de fluctuation.
2. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sachets, associe le nombre de sachets donnant des plantes résistantes. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}92$.

a. Puisque la variable suit une loi binomiale $\mathscr{B}(100, 0{,}92)$ l'espérance de X vaut np et l'écart type de X vaut $\sqrt{np(1-p}$

$E(X) = 100 \times 92 = 92 \quad \sigma(X) = \sqrt{100 \times 0{,}92 \times 0{,}08} \approx 2{,}71$.

b. La variable aléatoire X peut être approchée par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 92 et d'écart type $2,7$.

En utilisant la variable aléatoire Y, calculons la probabilité que le nombre de sachets donnant des plantes résistantes soit compris entre 89 et 94, c'est-à-dire calculons $P(89 \leqslant Y \leqslant 94)$.

À l'aide d'une calculatrice $P(89 \leqslant Y \leqslant 94) \approx 0{,}64$.

EXERCICE 3 **5 points**

L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. II peut cependant être dangereux lorsqu'on le reçoit en grande quantité.
On considère un échantillon d'une population de noyaux d'iode 131 comportant 10^6 noyaux au début de l'observation.
On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de 8,3 %.
On note u_n le nombre de noyaux de cet échantillon au bout de n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.

1. Calculons u_1 puis u_2.
À un taux d'évolution de $-8{,}3\,\%$, correspond un coefficient multiplicateur de $1 - 0{,}083$ soit 0,917.
$u_1 = 10^6 \times 0{,}917 \quad u_2 = \left(0{,}917 \times 10^6\right) \times 0{,}917 \approx 0{,}841 \times 10^6$

2. $u_{n+1} = 0{,}917 u_n$. Passant d'un terme au suivant en le multipliant par un même nombre, la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme 10^6 et de raison 0,917 .

3. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.
Par conséquent $u_n = 10^6 \times (0{,}917)^n$.

4. Déterminons à partir de combien de jours la population de noyaux aura diminué au moins de moitié.
Pour ce faire, résolvons $u_n \leqslant \dfrac{10^6}{2}$

$$u_n \leqslant \frac{10^6}{2}$$
$$0{,}917^n \times 10^6 \leqslant \frac{10^6}{2}$$
$$0{,}917^n \leqslant \frac{1}{2}$$
$$\ln 0{,}917^n \leqslant \ln \frac{1}{2}$$
$$n \ln 0{,}917 \leqslant -\ln 2 \qquad \text{car } \ln \frac{1}{b} = -\ln b$$
$$n \geqslant \frac{-\ln 2}{\ln 0{,}917} \qquad \text{car } \ln 0{,}917 < 0$$
$$\frac{-\ln 2}{\ln 0{,}917} \approx 7{,}999\,59$$

Au bout de huit jours, la population de noyaux aura diminué au moins de moitié.
Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode 131.

5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n et u sont des nombres
Initialisation :	Affecter la valeur 0 à n
	Affecter la valeur 10^6 à u
Traitement :	Tant que $u > \dfrac{10^6}{2}$
	n prend la valeur $n + 1$
	u prend la valeur $u \times 0{,}917$
	Fin tant que
Sortie :	Afficher n

a. La valeur n en sortie de cet algorithme correspond à la demi-vie. u correspond au nombre de noyaux et n au nombre de boucles qu'il faut effectuer pour avoir la moitié du nombre de noyaux.

b. Si on programme cet algorithme, il affiche 8, la réponse trouvée à la question 4.

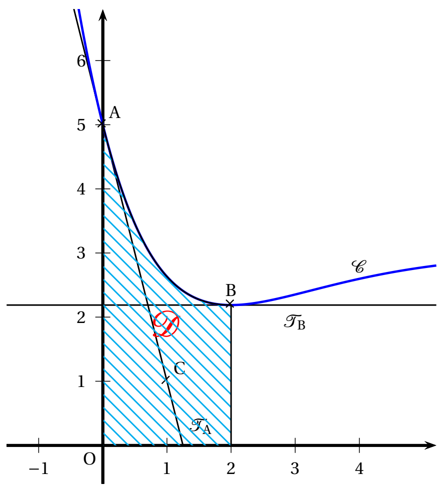
c. Pour le Césium 137, le nombre de noyaux diminue chaque année de 2,3 %.
Quelles modifications faut-il apporter à l'algorithme précédent pour trouver la demi-vie du césium 137 sachant que la population au départ est de 10^8 noyaux ?
Dans la ligne « affecter à u la valeur 10^6 » nous allons remplacer 10^6 par 10^8 et dans le traitement de u nous allons remplacer 0,917 par 0,977, coefficient multiplicateur associé à une baisse de 2,3 %.

Remarque la demi-vie est indépendante du nombre de noyaux. Dans le calcul à la question 4, nous avons pu simplifier par u_0.

EXERCICE 4 — 7 points

Dans tout l'exercice, on désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A (0 ; 5) et par le point B d'abscisse 2.
La tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe au point A passe par le point C(1 ; 1) et la tangente $\mathscr{T}_B$ au point B est horizontale.



PARTIE A :

Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Une bonne réponse rapporte 0,5 *point.*
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponses n'enlève ni ne rapporte aucun point. On notera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. La valeur de $f(0)$ est :

a. $\cancel{-4}$ **b.** $\cancel{4}$ **c.** $\cancel{1,2}$ **d.** $\boxed{\text{autre réponse}}$

A(0 , 5)

2. La valeur de $f'(0)$ est :

a. $\boxed{-4}$ **b.** $\cancel{4}$ **c.** $\cancel{1,2}$ **d.** ~~autre réponse~~

$m = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{5-1}{0-1}$

3. La valeur de $f'(2)$ est :

a. $\boxed{0}$ **b.** $\cancel{2,1}$ **c.** $\cancel{3}$ **d.** ~~autre réponse~~

la tangente $\mathscr{T}_B$ au point B est horizontale.

4. Un encadrement de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par des entiers naturels est :

a. $\cancel{3 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4}$ **b.** $\boxed{5 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 7}$ **c.** $\cancel{2 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 5}$ **d.** $\cancel{0 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2}$

le rectangle dont une diagonale est [O ; B] a déjà une aire supérieure à 4

PARTIE B

La fonction f représentée dans la PARTIE A est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(-x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} + 3$.

1. On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est 3. Déterminons la limite de f en $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^{-x}+3 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2-2x+2\right) \times \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x} = -\infty \times +\infty = -\infty$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f et on admet que pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(x^2-4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   a. Étudions le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. Puisque pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, e^{-x} est strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui de x^2-4. $x^2-4 = (x-2)(x+2)$.
   $x+2 > 0$ si et seulement si $x > -2$, $x-2 > 0$ si et seulement si $x > 2$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Nous avons donc pour $x \in]-\infty\,;\,-2[$ ou pour $x \in]2\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$ et pour $x \in]-2\,;\,2[$, $f'(x) < 0$.

   b. Étudions le sens de variation de f.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I. Pour $x \in]-2\,;\,2[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. Pour tout $x \in]-\infty\,;\,-2[$ ou pour tout $x \in]2\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$, par conséquent, f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.
   Dressons le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f			$2\mathrm{e}^2+3$				3
	$-\infty$				$3-6\mathrm{e}^{-2}$		

3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(x^2+4x+2\right)\mathrm{e}^{-x} + 3x.$$

   La fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ lorsque $F' = f$.

$$F'(x) = (2x+4)\mathrm{e}^{-x} + (x^2+4x+2)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \left(2x+4-x^2-4x-2\right)\mathrm{e}^{-x} = (-x^2-2x+2)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$$

   F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4. On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

   a. Calculons la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$. Pour tout x appartenant à$[0\,;2]$, $f(x)$ est positive, par conséquent l'aire du domaine plan $\mathscr{D}$ en unités d'aire est $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

$$\mathscr{A} = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \left[\left(x^2+4x+2\right)\mathrm{e}^{-x}+3x\right]_0^2 = 14\mathrm{e}^{-2}+6-(2) = 14\mathrm{e}^{-2}+4.$$

   $\mathscr{A}$ vaut $14\mathrm{e}^{-2}+4$ unités d'aire.

   b. Une valeur approchée de $\mathscr{A}$ au centième est alors 5,89 unités d'aire.