Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI 2D/STL Nouvelle-Calédonie 18 novembre 2013

EXERCICE 1 **5 points**

PARTIE A :

1. Réponse c. : B$2 $*$ 0,4 + 3
2. Il semble que la limite de la suite soit égale à 5.
3. L'algorithme s'arrête pour $p = 7$: avec $u_7 = 4{,}9902$, on a bien $|u_7 - 5| \leqslant 0{,}01$.

PARTIE B :

1. D'après l'écriture du terme général, cette suite est géométrique de premier terme 6 et de raison 0,4.
2. Comme $0 < 0{,}4 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 6 \times 0{,}4^n = 0$.
   Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
3. Comme $u_n = 5 - v_n$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 5 - 0 = 5$.
4. **a.** Cette somme est la somme des $n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique, on sait que cette somme est égale à :
   $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 6 \times \dfrac{1 - 0{,}4^{n+1}}{0 - 0{,}4} 6 \times \dfrac{1 - 0{,}4^{n+1}}{0{,}6} = 10\left(1 - 0{,}4^{n+1}\right) =$
   $10 - 4 \times 0{,}4^n$.

   b. Comme pour tout entier n, $u_n = 5 - v_n$, on a :
   $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 5(n+1) - (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 5(n+1) - (10 - 4 \times 0{,}4^n) =$
   $5n + 5 - 10 + 4 \times 0{,}4^n = 5n - 5 + 4 \times 0{,}4^n$ ou $5(n-1) + 4 \times 0{,}4^n$.

EXERCICE 2 **3 points**

1. Réponse **a.**.
2. $z = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$: cette écriture n'est pas celle d'une forme exponentielle car $\sqrt{2} <$ 0.
   Or $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$ Un argument de z est donc $\frac{5\pi}{4}$ à 2π près soit encore $-\frac{3\pi}{4}$. Réponse **c.**
3. Si f est définie par $f(t) = 3\cos\left(5t - \dfrac{\pi}{2}\right)$, alors $f'(t) = -15\sin\left(5t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ et
   $f''(t) = -75\cos\left(5t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.
   Donc $f''(t) + 25f(t) = 0$. Réponse **b.**
4. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions : $x \longmapsto C\mathrm{e}^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Réponse **a.**
5. $\ln(x+1) = 3 \iff \mathrm{e}^{\ln(x+1)} = \mathrm{e}^3 \iff x + 1 = \mathrm{e}^3 \iff x = \mathrm{e}^3 - 1$. Réponse **c.**
6. $2^x - 3 \leqslant 5 \iff 2^x \leqslant 8 \iff x\ln 2 \leqslant \ln 8$ ou encore $x\ln 2 \leqslant \ln 2^3 \iff x\ln 2 \leqslant 3\ln 2 \iff x \leqslant 3$. Réponse **b.**

EXERCICE 3 **7 points**

PARTIE A :

1. **a.** On lit $f(1) \approx -1$.

   b. On lit $f'(1) = \dfrac{-2}{1} = -2$.

   c. Son coefficient directeur est égal à -2 et son ordonnée à l'origine 1 ; l'équation de $\mathcal{T}$ est donc $y = -2x + 1$.

2. **a.** $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{x^2} = \dfrac{2x - a}{x^2}$.

   b. On sait que $f'(1) = -2$ soit $\dfrac{2 \times 1 - a}{1^2} = -2 \iff 2 - a = -2 \iff a = 4$.

   Donc $f(x) = 2\ln x + \dfrac{4}{x} + b$. mais on sait que $f(1) = -1$, soit $2\ln 1 + \dfrac{4}{1} + b = -1 \iff b = -1 - 4 = -5$.

   Finalement : $f(x) = 2\ln x + \dfrac{4}{x} - 5$.

PARTIE B :

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x}$, d'où par somme de limites $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. Ceci signifie que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}$ au voisinage de zéro.

2. **a.** On a $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x - 4}{x^2}$.

   b. Comme $x^2 > 0$ si $x \in]0~;~+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 4$ qui est positif si $x > 2$.

   Conclusion : $f'(x) > 0$ sur $]2~;~+\infty[$;

   $f'(x) < 0 sur]0~;~2[$;

   $f'(2) = 0$.

3. Le résultat précédent permet de construire le tableau suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2\ln 2 - 3$	↗	$+\infty$

4. Comme $2\ln 2 - 3 \approx -1,62$ est inférieur à zéro, la fonction décroissant de plus l'infini à $2\ln 2 - 3$ s'annule une fois sur l'intervalle $]0\,;\,2[$, puis croissant de $2\ln 2 - 3$ à plus l'infini s'annule une autre fois sur l'intervalle $]2~;~+\infty[$.

   L'équation $f(x) = 0$, pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$ a donc deux solutions a et b.

5. **a.** On a $f(1) = 2 \times 0\dfrac{4}{1} - 5 = -1$ et $f(3) = 2\ln 3 + \dfrac{4}{3} - 5 = 2\ln 3 - \dfrac{11}{3} \approx -1,47$.

   Donc sur l'intervalle $[1\,;\,3]$, f ne prend que des valeurs négatives.

   b. On a vu que sur l'intervalle $[1\,;\,3]$, f est négative, donc l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ est égale à

   $\mathcal{A} = -\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -[F(3) - F(1)] = F(1) - F(3) = (2 \times 1 + 4)\ln 1 - 7 \times 1 - [(2 \times 3 + 4)\ln 3 - 7 \times 3] = -7 - 10\ln 3 + 21 = 14 - 10\ln 3$ (unités d'aire).

   Ob a $\mathcal{A} = 14 - 10\ln 3 \approx 3,01$ unités d'aire.

EXERCICE 4 **5 points**

PARTIE A :

1. Le nombre de pièces est assez important pour que l'on puisse assimiler le tirage de 10 pièces à un prélèvement avec remise de 10 pièces, la probabilité de prélevée étant à chaque fois la même : 0,9.

   La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,9$.
2. On a $\text{E}(X) = n \times p = 10 \times 0,9 = 9$.

   $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{10 \times 0,9 \times 0,1} = \sqrt{0,9}$.
3. La calculatrice donne $p(X \geqslant 8) \approx 0{,}929\,8 \approx 0,93$.

PARTIE B :

1. La calculatrice livre : $\mu = 80$ et $\sigma = 0,6$, puis

   $p(79 \leqslant M \leqslant 81) \approx 0,904$.
2. Comme l'espérance est égale à 80, la probabilité que le diamètre d'une pièce prélevée au hasard soit supérieur à 80 est égale à 0,5.

PARTIE C :

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des médailles non conformes obtenues dans un échantillon de 300 médailles est égale à :

   $I = \left[0,05 - 1,96 \times \sqrt{\dfrac{0,05 \times 0,95}{300}}\ ;\ 0,05 + 1,96 \times \sqrt{\dfrac{0,05 \times 0,95}{300}}\right]$ soit

   $I = [0,025\ ;\ 0,075]$.
2. On a $n > 30$, $np = 300 \times 0,05 = 15 > 10$ et $n(1-p) = 300 \times 0,95 = 285 > 10$: les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation asymptotique sont réunies. Donc la fréquence d'apparition des médailles non conformes est :

   $f = \dfrac{24}{300} = \dfrac{8}{100} = 0,08$.

   Or $0,8 \notin [0,025\ ;\ 0,075]$, donc au seuil de confiance de 95 % on décide de revoir le réglage de la machine.