Baccalauréat STI2D & STL/SPCL

Métropole – 10 septembre 2019

Exercice 1 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

1. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;\,12]$.
   $P(X \leqslant 5)$ est égale à :

   a. $\dfrac{1}{2}$ **b.** $\dfrac{3}{10}$ **c.** $\dfrac{5}{12}$ **d.** $\dfrac{5}{7}$

2. Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 20 et d'écart-type σ.
   $P(X \leqslant 18)$ peut être égale à :

   a. 0,4 **b.** 1,8 **c.** 0,6 **d.** 0,82

3. La durée de vie, en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne de ce composant électronique est de 5 ans.
   Le paramètre λ vaut :

   a. 5 **b.** 0,5 **c.** 0,2 **d.** $-0,2$

4. Un argument du nombre complexe $z = (2 - 2\,\mathrm{i}) \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ est :

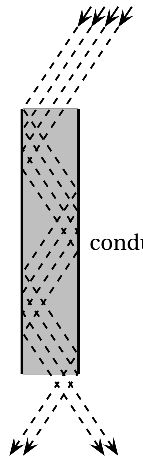
   a. $\dfrac{\pi}{2}$ **b.** $\dfrac{\pi}{4}$ **c.** $\dfrac{3\pi}{4}$ **d.** $4\sqrt{2}$

Exercice 2 — 6 points

Pour permettre un apport de lumière naturelle dans une habitation et réaliser des économies d'électricité, une solution réside dans l'installation d'un conduit de lumière au niveau de la toiture. Il s'agit d'un tube cylindrique en aluminium recouvert d'un film multicouche à base de polymère.

Dans ce conduit, le flux lumineux, exprimé en lumens (lm), diminue de 0,5 % tous les décimètres.

On rappelle qu'un décimètre vaut dix centimètres.



Partie A

Dans cette partie, on suppose que le flux lumineux à l'entrée d'un tel conduit de lumière est de 4 000 lumens.
On pose $u_0 = 4000$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note (u_n) le flux lumineux, en lumens, à la sortie d'un conduit de longueur n décimètres.

1. Justifier que $u_1 = 3980$.
2. Calculer le flux lumineux, en lumens, à la sortie d'un conduit d'une longueur de 20 cm.
3. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
4. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
5. Un conduit de lumière de 2 mètres de long permettrait-il d'obtenir un flux lumineux d'au moins 3 600 lumens en sortie ?
6. On considère l'algorithme ci-dessous où n désigne un entier naturel et U un nombre réel.

$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow 4000$
Tant que $U > 3000$
    $n \leftarrow n+1$
    $U \leftarrow U \times 0{,}995$
Fin Tant que

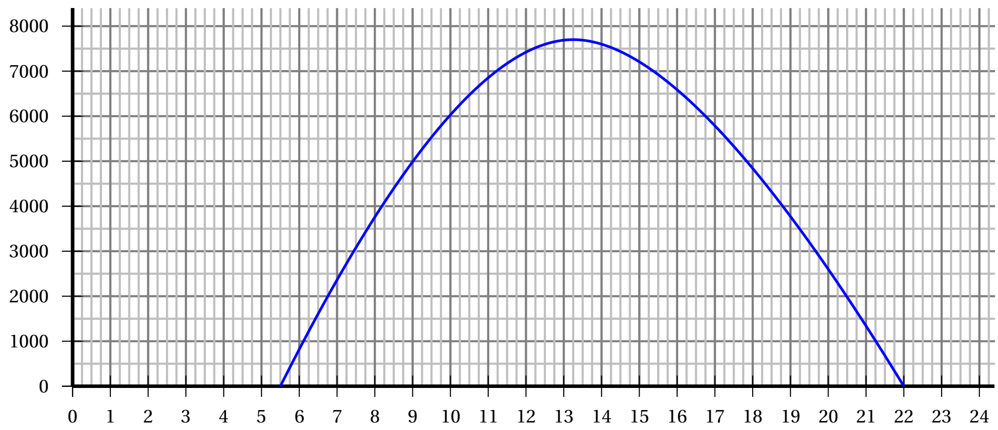
   a. Indiquer le contenu de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme.

   b. Interpréter la réponse obtenue à la question précédente dans le contexte du conduit de lumière.

Partie B

Dans une pièce sombre, on souhaite remplacer un éclairage électrique par l'installation d'un conduit de lumière d'une longueur de 4 mètres pour obtenir en sortie un flux lumineux d'au moins 3 100 lumens.

1. Déterminer le flux lumineux nécessaire à l'entrée de ce conduit.
2. La courbe ci-dessous modélise le flux lumineux, en lumens, à l'entrée de ce conduit en fonction de l'heure pour une journée donnée.



Déterminer, avec la précision permise par le graphique, la plage horaire durant laquelle ce flux lumineux à l'entrée du conduit est suffisant.

Exercice 3 — 5 points

L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence.
Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane.
La concentration d'octane, en moles par litre, dans la cuve est modélisée par une fonction f du temps t, exprimé en minutes. On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle suivante :

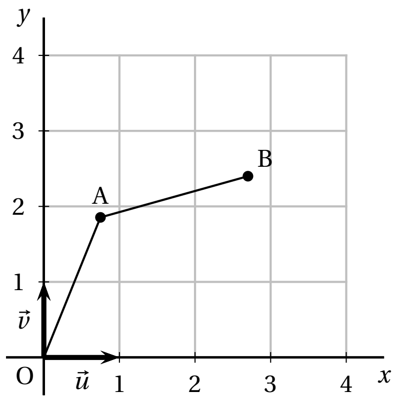
$$(E)~:~y' + 0{,}12y = 0{,}003.$$

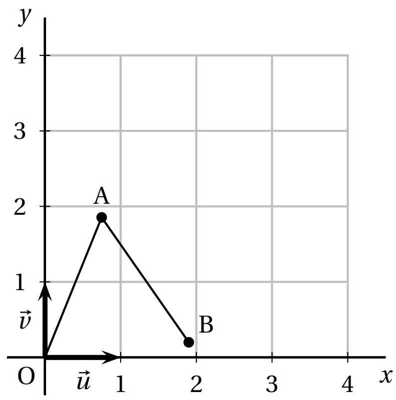
À l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de 0,5 mole par litre (mol.L^{-1}).

1. **a.** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
   b. Donner $f(0)$.
   c. Vérifier que la fonction f est définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(t) = 0{,}475\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 0{,}025$.
2. **a.** Calculer la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   c. Interpréter cette réponse dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer, en justifiant votre réponse, à la minute près, le temps nécessaire pour obtenirune concentration en octane dans la cuve de 0,25 mole par litre.
4. **a.** Calculer, en justifiant votre réponse, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.
   Interpréter le résultat dans le contexte.
   b. Le processus de transformation de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure. Expliquer ce choix.

Exercice 4 — 5 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, le bras articulé d'un robot, fixé au point O, est représenté par deux segments [OA] et [AB], chacun de longueur 2 unités.
Deux exemples de position du bras articulé sont donnés ci-dessous à titre indicatif.





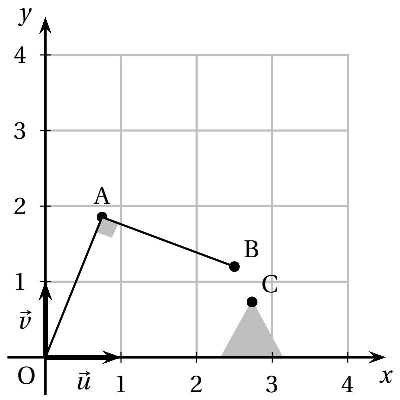
1. **a.** Tracer sur la copie un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

   Placer le point A d'affixe $z_{\text{A}} = 2\text{i}$ puis construire l'extrémité B du bras articulé lorsque son affixe z_{B} a pour argument $\dfrac{\pi}{4}$.

   b. Donner l'affixe du point B sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

2. L'extrémité B du bras peut-elle atteindre un objet qui se trouve à une distance de 4,5 unités du point O ?

3. Pour soulever un objet lourd dont le point d'accroche est le point C (voir figure ci-contre), il faut rigidifier l'articulation en A. On décide alors de bloquer l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AO}}\,,\,\overrightarrow{\text{AB}}\right)$ tel qu'une mesure de cet angle soit constamment égale à $\dfrac{\pi}{2}$ radians.



   a. Déterminer la longueur OB.

   b. Le point C a pour affixe $z_{\text{C}} = 2\sqrt{2}\,\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{\pi}{12}}$.

   Justifier que l'extrémité B du bras articulé pourra atteindre le point d'accroche C de l'objet.

   c. Lorsque le bras articulé saisit l'objet, les points B et C sont confondus.

   Calculer la mesure de l'angle que forme alors le bras [OA] avec l'axe [Ox).