Corrigé du baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole septembre 2007

EXERCICE 1 **8 points**

Question 1
Réponse C.

Question 2
$\ln x + 2 = 0 \iff \ln x = -2 \iff \ln x \ln \mathrm{e}^{-2} \iff x = \mathrm{e}^{-2}$ d'après la croissance de la fonction ln.
Réponse A.

Question 3
$\mathrm{e}^{-\ln 3} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 3}} = \dfrac{1}{3}$. Réponse B.

Question 4
La courbe est une ellipse. La réponse B est éliminée. Le point A n'appartient à la première courbe, ni à la troisième. Réponse D.

Question 5
On a $a = 3, b = 2$, d'où $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Les deux foyers ont pour coordonnées $\left(\sqrt{5}\ ;\ 0\right)$ et $\left(-\sqrt{5}\ ;\ 0\right)$. Réponse C.

Question 6
524 habitants sur 1 000 ont voté X. La probabilité est donc égale à $\dfrac{524}{1\,000} = 0,524$. Réponse C.

A. $0,314$	B. $0,138$	C. $0,524$	D. $\dfrac{524}{476}$

Question 7
Il y a eu 214 habitants de 30 à 50 ans qui ont voté le choix X. La probabilité est donc égale à $\dfrac{214}{1\,000} = 0,214$. Réponse A.

Question 8
On a la formule $p(\mathrm{B} \cup \mathrm{X}) = p(\mathrm{B}) + p(\mathrm{X}) - p(\mathrm{B} \cap \mathrm{X}) = 0,402 + 0,524 - 0,214 = 0,712$. Réponse D.

EXERCICE 2 **12 points**

PARTIE 1

Étude d'une première courbe $\mathscr{C}_1$

1. $\left\{\begin{array}{l c l} \mathrm{A}(5\ ;\ 1) & \in & \mathscr{C}_1 \\ \mathrm{B}(9\ ;\ 5) & \in & \mathscr{C}_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} -25 + 5b + c & = & 1 \\ -81 + 9b + c & = & 5 \end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence) $-56 + 4b = 4 \iff 4b = 60 \iff b = 15$.

   D'où en reportant dans la première équation $-25 + 75 + c = 1 \iff c = -49$. Donc $g(x) = -x^2 + 15x - 49$.

2. **a.** g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = -2x + 15$.

   $-2x + 15 > 0 \iff 15 > 2x \iff \dfrac{15}{2} > x$;

   $-2x + 15 < 0 \iff 15 < 2x \iff \dfrac{15}{2} < x$;

   La fonction g est donc croissante sur $[5\ ;\ 7,5]$ et décroissante sur $[7,5\ ;\ 9]$.

   b. L'extremum (maximum ici) est atteint pour $x = \dfrac{15}{2}$. Ce maximum est égal à $g\left(\frac{15}{2}\right) = -\left(\dfrac{15}{2}\right)^2 + 15 \times \left(\dfrac{15}{2}\right) - 49 = -\dfrac{225}{4} + \dfrac{225}{2} - 49 = \dfrac{225}{4} - 49 = \dfrac{225 - 196}{4} = \dfrac{29}{4}$.

PARTIE 2
Étude et tracé de la courbe $\mathscr{C}_2$

1. **a.** f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$, donc sur $[1~;~5]$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x - 4\dfrac{1}{x} = x - \dfrac{4}{x}$.

   b. $f'(x) = x - \dfrac{4}{x} = \dfrac{x^2-4}{x} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x}$.

   c. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $(x-2)(x+2)$: celui-ci est positif sauf entre entre les racines -2 et 2.

   Donc $f'(x) < 0$ si $1 \leqslant x < 2$ et $f'(x) > 0$ si $2 < x < 5$

2. De la question précédente on déduit que :

   Si $1 \leqslant x < 2$, f est décroissante ;

   Si $2 < x < 5$ f est croissante.

   D'où le tableau de variations de f :

x	1	2	5
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	1,5	0,5	0,2	0,5	1,1	2,1	3,5	5,1	7,1

3. Tracer $\mathscr{C}_2$ avec soin sur la feuille annexe, dans le même repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

PARTIE 3
Archibald Nikolaüs veut faire dorer à la feuille d'or la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_2$ les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.

1. Voir plus bas.

2. **a.** F est dérivable sur $[1~;~5]$ et $F'(x) = 3 \times \dfrac{1}{6}x^2 - 4\ln x - 4x \times \dfrac{1}{x} + 5 = \dfrac{1}{2}x^2 - 4\ln x - 4 + 5 = \dfrac{1}{2}x^2 - 4\ln x + 1 = f(x)$.

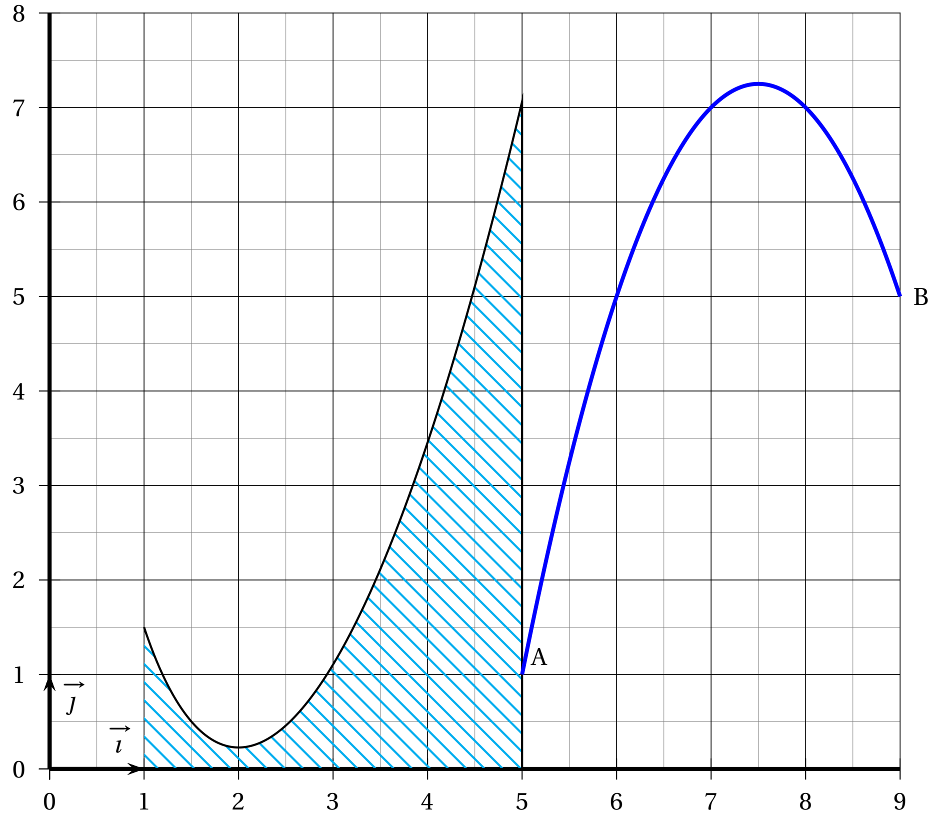
   F est donc une primitive de f sur $[1~;5]$.

   b. La fonction f étant positive sur $[1~;5]$, on sait que l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_2$ les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$ est égale à l'intégrale :

   $\text{I} = \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_1^5 = F(5) - F(1) = \dfrac{1}{6}5^3 - 4 \times 5\ln 5 + 5 \times 5 - \left(\dfrac{1}{6}1^3 - 4 \times 1\ln 1 + 5 \times 1\right) = \dfrac{125}{6} - 20\ln 5 + 25 - \dfrac{1}{6} - 5 = \dfrac{124}{6} - 20\ln 5 + 20 = \dfrac{62}{3} + 20 - 20\ln 5 = \dfrac{122}{3} - 20\ln 5$.

   c. L'ai re de la partie hachurée est donc égale à $\dfrac{122}{3} - 20\ln 5 \approx 8,47 \approx 8,5$ (u. a.)

FEUILLE ANNEXE à rendre avec la copie



Question numéro	1	2	3	4	5	6	7	8
Réponse	C	A	B	D	C	C	A	D