Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI novembre 2007 ∾
Génie Mécanique - Génie Énergétique - Génie Civil
Nouvelle-Calédonie

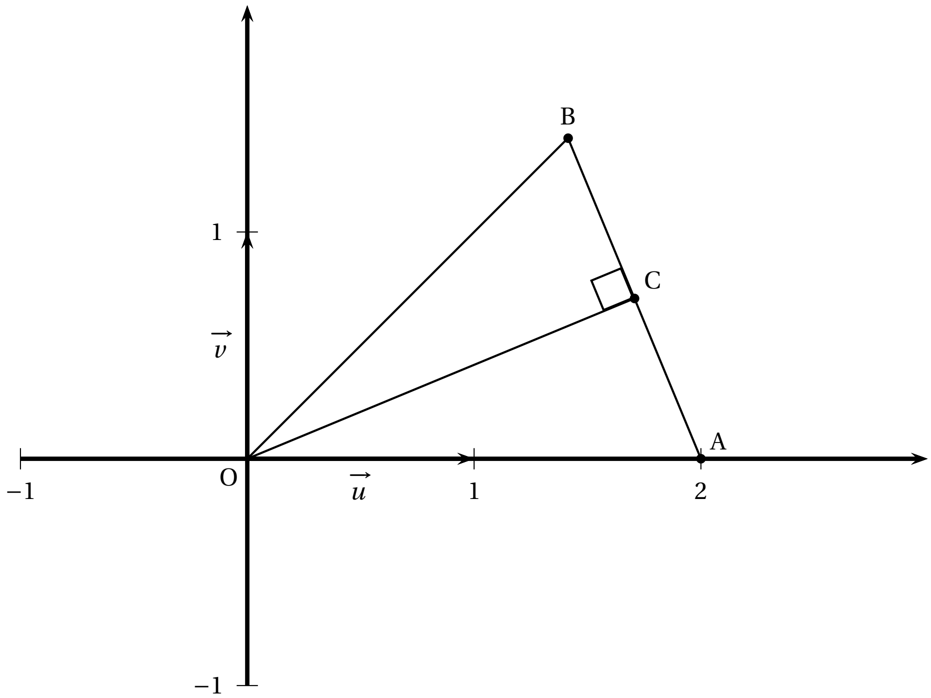
EXERCICE 1 **5 points**

1. Soit $\Delta = \left(2+\sqrt{2}\right)^2 - 4(2+\sqrt{2}) = 4+2+4\sqrt{2}-8-4\sqrt{2} = -2 = (2\text{i})^2$.
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{2+\sqrt{2}+2\text{i}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2+\sqrt{2}-2\text{i}}{2}.$$
On a donc $c = z_1$.

2. **a.** Voir la figure.
b. $b = \sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}$, donc $|b| = \sqrt{2+2} = 2$.
D'où en factorisant le module : $b = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{i}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
c. On a $|a| = \text{OA} = 2 = |b| = \text{OB}$, donc OAB est isocèle en O.
Comme $b = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} = a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$, on en déduit que B est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Donc $\widehat{\text{AOB}} = \frac{\pi}{4}$.

3. **a.** Le milieu de [AB] a pour affixe $\frac{a+b}{2} = \frac{2+\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}}{2} = c$.
Le point C est le milieu du segment [AB].
b. Le triangle AOB est isocèle en O et C est le milieu de la base [AB] : [OC] est donc médiane, hauteur, donc AOC est un triangle rectangle rectangle en C.
[OC] est aussi la bissectrice de $\widehat{\text{AOB}}$, donc $\widehat{\text{AOC}} = \frac{1}{2}\widehat{\text{AOB}} = \frac{\pi}{8}$.
c. Dans le triangle AOC, on a $|c| = \text{OC} = \text{OA}\cos\widehat{\text{AOC}} = 2\cos\frac{\pi}{8}$.

4. **a.** Par application du théorème de Pythagore dans le triangle AOC :
$\text{OA}^2 = \text{OC}^2+\text{CA}^2 \iff 2^2 = |c|^2 + \left|\frac{2+\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}}{2}-2\right|^2 \iff 2^2 = |c|^2 + \left|\frac{-2+\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}}{2}\right|^2 \iff 4 = |c|^2 + \frac{4+2-4\sqrt{2}+2}{4} \iff |c|^2 = \frac{16-8+4\sqrt{2}}{4} = \frac{8+4\sqrt{2}}{4} = 2+\sqrt{2}$.
Donc $|c| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.
b. Des résultats obtenus au 3. c. et au 4. a. on déduit :
$|c| = 2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.



EXERCICE 2 **4 points**

1.

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S	8	8	16
Sans le défaut S	4	180	184
Total	12	188	200

2. **a.** Si l'objet présente le seul défaut S, le prix de vente est ramené à : $250 \times 0,85 = 212,50$ € ; dans ce cas le bénéfice est égal à $212,50 - 2100 = 12,50$.

Si l'objet présente le seul défaut F, le bénéfice est égal à $250 - 245 = 5$ € ;

Si l'objet présente les deux défauts, perte est égale à $250 - 258 = 8$ ce qui correspond à $X = -8$;

Enfin si l'objet est parfait le bénéfice est égal à $250 - 200 = 50$ €.

b. Il y a en moyenne 8 objets avec le seul défaut S ; la probabilité de tomber sur un tel objet est donc égale à $\dfrac{8}{200} = \dfrac{4}{100} = 0,04$.

c. De même la probabilité de tirer un objet avec le seul défaut F est égale à $\dfrac{4}{200} = \dfrac{2}{100} = 0,02$, la probabilité de tirer un objet avec les deux défauts est égale à $\dfrac{8}{200} = \dfrac{4}{100} = 0,04$.

Enfin la probabilité de tirer un objet parfait est égale à $\dfrac{180}{200} = \dfrac{90}{100} = 0,9$.

D'où le tableau :

x_i	50	12,50	5	-8
$p(X = x_i)$	0,9	0,04	0,02	0,04

d. $E(X) = 50 \times 0,9 + 12,5 \times 0,04 + 5 \times 0,02 - 8 \times 0,04 = 45 + 0,5 + 0,1 - 0,32 = 45,6 - 0,32 = 45,28$ €.

Cette espérance représente, pour un grand nombre d'objets vendus, la moyenne du bénéfice sur chaque vente.

PROBLÈME **11 points**

I. Résolution d'une équation différentielle

1. On sait que les solutions sont de la forme $y = K\text{e}^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$.
2. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3\text{e}^{-x} - 3x\text{e}^{-x} + 1$.
   $u' + u = 3\text{e}^{-x} - 3x\text{e}^{-x} + 1 + 3x\text{e}^{-x} + x = 3\text{e}^{-x} + x + 1$, donc u est une solution de (E).
3. Avec $f(x) = 3\text{e}^{-x} + x + 1 + C\text{e}^{-x}$, $f(0) = 2 \iff 3\text{e}^{-0} + 0 + 1 + C\text{e}^{-0} = 2 \iff 4 + C = 2 \iff C = -2$.

II. Étude d'une fonction auxiliaire *g*

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $g'(x) = -\text{e}^{-x}(-3x+1) - 3\text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}(3x-4)$.
2. Comme $\text{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, $g'(x)$ est du signe de $(3x-4)$.
   Or $3x - 4 > 0 \iff 3x > 4 \iff x > \dfrac{4}{3}$.
   Conclusion : sur $\left]\dfrac{4}{3}~;~+\infty\right[$, g est croissante et de la même façon sur $\left]-\infty~;~\dfrac{4}{3}\right[$, g est décroissante. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

3. $g\left(\dfrac{4}{3}\right) = \text{e}^{-\frac{4}{3}}\left(-3 \times \frac{4}{3} + 1\right) + 1 = -3\text{e}^{-\frac{4}{3}} + 1 \approx 0,21 > 0$.
   Le minimum de la fonction étant supérieur à zéro, on peut en déduire que la fonction g est positive non nulle sur $\mathbb{R}$.

III. Étude de la fonction *f* déterminée en I.

1. Étude des limites.
   a. $f(x) = 3x\text{e}^{-x} + 2\text{e}^{-x} + x$.
   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\text{e}^{-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$; donc :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
   b. On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\text{e}^{-x} = -\infty$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = -\infty$, par somme des limites
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
2. Étude des variations de f.
   a. f est une somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) = -\text{e}^{-x}(3x+2) + 3\text{e}^{-x} + 1 = \text{e}^{-x}(-3x-2+3) + 1 = \text{e}^{-x}(-3x+1) + 1 = g(x)$.
   b. On a vu que pour tout réel, $g(x) > 0$, donc la positivité de $f'(x)$ entraîne la croissance sur $\mathbb{R}$ de la fonction f. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. On a $f(x) - x = \text{e}^{-x}(3x+2) + x - x = \text{e}^{-x}(3x+2)$ et on a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-x}(3x+2) = 0$, ce qui montre que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

La position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$ est donnée par le signe de la différence $f(x) - x = \text{e}^{-x}(3x+2)$.

Donc si $x < -\dfrac{2}{3}$, $\mathcal{C}$ est au dessous de $\mathcal{D}$ et si $x > -\dfrac{2}{3}$, $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}$.

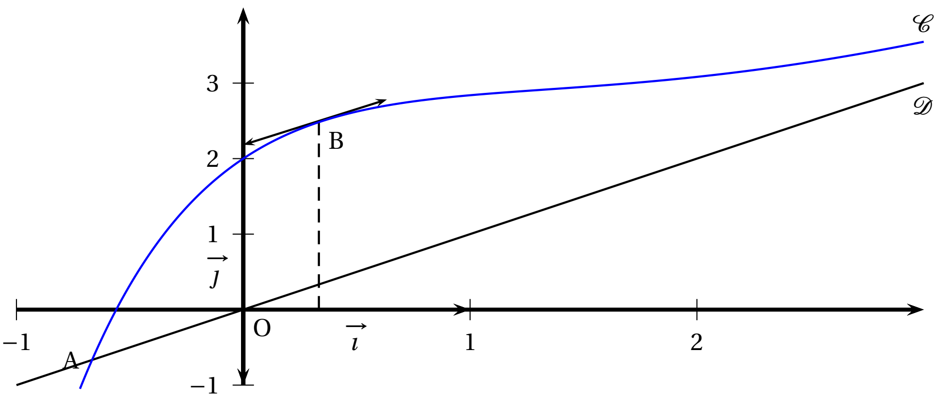
Le point commun A a pour abscisse $-\dfrac{2}{3}$.

4. La droite $\mathcal{D}$ a un coefficient directeur égal à 1. Il faut donc trouver le(s) point(s) de $\mathcal{D}$ où le nombre dérivé de f est égal à 1, soit :

$f'(x) = 1 \iff g(x) = 1 \iff \text{e}^{-x}(-3x+1) + 1 = 1 \iff \text{e}^{-x}(-3x+1) = 0 \iff -3x+1 = 0 \iff \dfrac{1}{3} = x$.

Le seul point de $\mathcal{C}$ où la tangente a un coefficient directeur égal à 1 est le point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$.

5.



IV. Calcul d'une aire

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = -f'(x) + 3\text{e}^{-x} + x + 1 = -g(x) + 3\text{e}^{-x} + x + 1 = -\text{e}^{-x}(-3x+1) - 1 + 3\text{e}^{-x} + x + 1 = 3x\text{e}^{-x} - \text{e}^{-x} + 3\text{e}^{-x} + x = 3x\text{e}^{-x} + 2\text{e}^{-x} + x = (3x+2)\text{e}^{-x} + x = f(x)$.

Donc F est une primitive de la fonction f.

2. On a vu que sur $[0\,;\,1]$, la fonction f est croissante ; comme $f(0) = 2$, on en déduit que sur $[0\,;\,1]$, la fonction f est positive.

Conclusion : l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = -f(1) - 3\text{e}^{-1} + \frac{1^2}{2} + 1 - \left(-f(0) - 3\text{e}^{-0} + \frac{0^2}{2} + 0\right) = -5\text{e}^{-1} - 1 - 3\text{e}^{-1} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 3 = \frac{11}{2} - 8\text{e}^{-1}$ (u. a.).

Comme l'unité d'aire est égale à $3 \times 1 = 3$ cm^2 l'aire est égale à $3\left(\dfrac{11}{2} - 8\text{e}^{-1}\right) = \dfrac{33}{2} - 24\text{e}^{-1} \approx 7{,}670 \approx 7{,}67$ cm^2 au mm^2 près.