Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Novembre 2007 ∽
Génie électronique, électrotechnique, optique
Nouvelle-Calédonie

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité 4 cm).

On considère les trois nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}}$; $z_2 = 1 - \text{i}$; $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_2 sous forme exponentielle.
2. **a.** Écrire z_3 sous forme exponentielle.

   b. En déduire que $z_3 = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. **a.** En remarquant que $z_1 = z_2 \times z_3$, donner l'écriture de z_1 sous forme algébrique,

   b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. **a.** Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

   b. On désigne par I le point d'affixe 1.
   Placer le point I et préciser la nature du triangle OIB.
5. On désigne par R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Quelles sont les images respectives des points I et B par R ?

   b. En déduire la nature du triangle OAC.

EXERCICE 2 **4 points**

Lors d'une fête, le comité d'organisation a prévu une animation qui consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

La partie est organisée selon les règles suivantes :

On mise 3 euros puis on lance le dé ;

— pour la sortie du 6, on reçoit 10 euros ;

— pour la sortie du 5, on reçoit 4 euros ;

— pour la sortie du 4, on reçoit 1 euro ;

— dans les autres cas on ne reçoit rien.

On appelle gain algébrique d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise initiale.

Partie A

1. On note X la variable aléatoire qui à l'issue d'une partie associe le gain algébrique.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b. Établir la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$.

d. Le comité d'organisation prévoit la réalisation de 150 parties réalisées lors de cette fête.
Quelle bénéfice peut-il espérer tirer de ce jeu ?

2. Un joueur se présente, il dispose de 4 euros.
Déterminer la probabilité P que ce joueur puisse jouer deux parties.

Partie B

Le comité d'organisation a décidé en dernière minute de rendre ce jeu équitable.
La règle du jeu reste identique, seule la mise est changée.
Déterminer cette nouvelle mise x qui rend le jeu équitable.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x - 2.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.
Cette courbe est donnée sur la feuille annexe.

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que pour tout réel x on a l'égalité suivante :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + 2x\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{x}\right).$$

b. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (on utilisera le fait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$).

3. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x}}$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} :

5. On considère le point A de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $-\ln 3$.

a. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.

b. On note (T)la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
Montrer que le coefficient directeur de la droite (T) vaut -1.

6. Sur le graphique donné (feuille annexe), tracer les droites (D) et(T).

Partie B

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = -\mathrm{e}^{x} + x^2 - 2x$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(\mathscr{E})$ le domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

   Hachurer le domaine $(\mathscr{E})$. Soit $(\mathscr{A})$ l'aire du domaine $(\mathscr{E})$ en unités d'aire, calculer la valeur exacte de $(\mathscr{A})$.

   Donner une valeur approchée de $(\mathscr{A})$ à 10^2 près.

3. Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[1 ; 3]$. Interpréter graphiquement cette valeur.

Annexe à rendre avec la copie