Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait : $z^3 - 8 = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 8 = 0$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité 2 cm), on considère les points A d'affixe $z_{\text{A}} = 2$, B d'affixe $z_{\text{B}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}$ et C d'affixe $z_{\text{C}} = -1 - \text{i}\sqrt{3}$.
   a. Placer les points A, B et C
   b. Déterminer la nature du triangle ABC. Justifier la réponse.
3. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et on appelle A′, B′ et C′ les images respectives de A, B et C par R.
   a. Déterminer les formes exponentielles de z_{A}, z_{B}, et z_{C} puis de $z_{\text{A}'}$, $z_{\text{B}'}$, et $z_{\text{C}'}$.
   b. Placer A′, B′ et C′ sur la figure précédente.
   c. Vérifier que $z_{\text{A}'}$, $z_{\text{B}'}$, et $z_{\text{C}'}$ sont solutions de l'équation $z^3 = 8\text{i}$.

Exercice 2 **4 points**

Partie A

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise A s'élevait à 230 000 euros.
Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 15 000 euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires u_1 en 1991.
2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année $1990 + n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser le premier tenue u_0 et la raison a de cette suite.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A.

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise B s'élevait à 150 000 euros.
Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 1991.
2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année $1990 + n$.
   Justifier que (v_n) est une suite géométrique de raison $1,074$.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B.

Partie C

1. Que constate-t-on en 2006 pour les entreprises A et B ?
2. En 2006, le chef de l'entreprise B affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires pratiquement double de celui de l'entreprise A. A-t-il raison ? Justifier.

Problème **11 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2x^2+3x+4}{x}$.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $]0~;~+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + 3\ln(x) - \frac{4\ln(x)}{x}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité 3 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en 0 ; on remarquera que $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.

   Que peut-on en déduire ?
2. **a.** Montrer que pour tout x strictement positif $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.

   Donner les solutions dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.
4. Tracer $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation $y = x$.
5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$$

   est une primitive de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. On considère dans le plan le domaine $(\mathscr{D})$ délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

   a. Hachurer le domaine $(\mathscr{D})$.

   b. Calculer l'aire du domaine $(\mathscr{D})$ en unités d'aires puis en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm^2 près.