Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2007
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **6 points**

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 produisent le même type de pièces.

La machine M_1 fournit les $\frac{4}{5}$ de la production.

Parmi les pièces produites, certaines sont défectueuses. C'est le cas pour 5 % de celles produites par M_1 et 4 % de celles produites par M_2.

1. L'atelier produit 1 000 pièces par jour. Reproduire et compléter le tableau d'effectif suivant.

	Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2	Total
Nombre de pièces défectueuses	40	8	
Nombre de pièces non défectueuses			
Total			1 000

2. On choisit au hasard une pièce parmi la production totale de l'atelier d'un jour donné. Calculer la probabilité des évènements suivants

a. A : « la pièce choisie est produite par M1 ».

b. B : « la pièce choisie est défectueuse ».

c. On sait que la pièce choisie a été produite par M_1. Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas défectueuse ?

3. En sortie de chaîne de production chaque pièce coûte 38 € à l'atelier. Les pièces qui sont défectueuses doivent être réparées pour être mises sur le marché. La réparation coûte 4,30 € pour une pièce fabriquée par M_1 et 4,50 € pour une pièce fabriquée par M_2.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque pièce associe son coût de revient.

a. Quelles sont les trois valeurs prises par X ?

b. Donner la loi de probabilité de X.

c. Calculer E(X), espérance mathématique de X.

d. Quel doit être, au centime près, le prix minimal de vente d'une pièce pour que l'atelier ne vende pas à perte ?

EXERCICE 2 **4 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 6.$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a pour tout nombre réel x,
$f'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ (on pourra mettre en facteur le nombre e^{x} dans l'expression de $f(x)$).

3. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant les limites de f.

b. Écrire le calcul qui montre que le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est égal à $\dfrac{-25}{4}$.

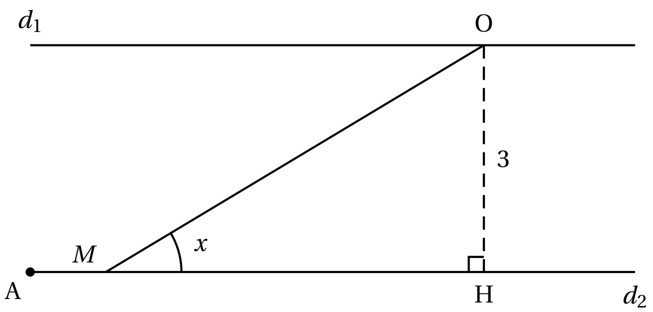
c. D'après le tableau de variation de la fonction f, quel est le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_1) suivante :

$$(E_1) \quad : \quad f(x) = 0.$$

PROBLÈME **10 points**

On considère deux droites parallèles d_1 et d_2. Le point O appartient à la droite d_1 et le point A appartient la droite d_2 comme indiqué sur la figure ci-dessous. On note H le point d'intersection de la droite d_2 et de la perpendiculaire à la droite d_2 passant par le point O (on dit que le point H est le projeté orthogonal du point O sur la droite d_2). La distance OH vaut 3 (OH = 3).

On considère un point M, distinct du point H, sur la demi-droite [HA) d'origine H et on note x l'angle variable $\widehat{\text{H}M\text{O}}$.
Le nombre x appartient donc à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.



Partie I : conjecture puis vérification

1. Selon vous, comment varie la longueur OM en fonction de l'angle x ? (aucune justification mathématique n'est demandée)

2. Calculer OM lorsque $x = \dfrac{\pi}{3}$.

3. Exprimer OM en fonction de x pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{3}{\sin x}$.

Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{-3\cos x}{\sin^2 x}$.

Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations. (*On ne demande pas de préciser la limite en* 0.)

5. Recopier puis compléter le tableau de valeurs de la fonction f arrondies au dixième près.

x	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	1	$\dfrac{\pi}{2}$
$f(x)$				

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Prendre 2 cm pour unité graphique.

Partie II : Calcul d'un volume

On veut calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.
On rappelle que le volume V de ce solide, en unités de volume, est donné par la formule :

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin x}$.
En déduire une primitive H sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction h définie par

$$h(x) = [f(x)]^2.$$

2. Calculer la valeur exacte du volume V en cm^3, puis une valeur arrondie au mm^3.