Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Novembre 2007
Génie Mécanique - Génie Énergétique - Génie Civil
Nouvelle-Calédonie

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 3 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère le point A d'affixe $a = 2$ et le point B d'affixe $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)z + \left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Déterminer les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on note C le point du plan d'affixe $c = \dfrac{2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$.

2. Étude du triangle AOB.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe b.

c. En déduire la nature du triangle AOB, ainsi que la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

3. Étude du triangle AOC.

a. Démontrer que C est le milieu du segment [AB].

b. En déduire la nature du triangle AOC, ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{AOC}$

c. En déduire un argument du nombre complexe c.

4. Calcul de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

a. Démontrer que : $|c| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

b. Déduire des questions précédentes que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Une entreprise produit en série des objets qu'elle destine à la vente. Ces objets peuvent présenter deux types de défauts :

- le défaut S de nature esthétique ;
- le défaut F de fonctionnement.

Un objet est déclaré parfait s'il ne présente aucun des deux défauts.

1. On prélève un lot de 200 objets sur la production et on constate que :

- le défaut S est observé sur 16 objets ;
- le défaut F est observé sur 12 objets ;
- 180 objets sont déclarés parfaits.

Recopier et compléter le tableau suivant :

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S			16
Sans le défaut S			
Total			200

On admet que la répartition des deux types de défauts, observée dans le lot de 200 objets prélevés, reflète celle de l'ensemble de la production. On admet également que tout objet produit est vendu. On sait en outre que le coût de fabrication d'un objet est de 200 €.

2. Dans cette question, le prix de vente de l'objet est fixé à 250 €.

Si l'objet présente le seul défaut S, l'entreprise accorde au client une réduction de 15 % du prix.

Si l'objet présente le seul défaut F, l'entreprise réalise les réparations, à ses frais, pour un coût de 45 €.

Si l'objet présente les deux défauts, l'entreprise réalise les réparations, à ses frais, pour un coût de 58 €.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe le bénéfice algébrique, en euro, réalisé par l'entreprise à la vente de cet objet.

a. Justifier le fait que X prend les valeurs (exprimées en euro) : 50 ; 12,50 ; 5 et -8.

b. Démontrer que la probabilité pour qu'un objet présente le seul défaut S est $0,04$.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X (On pourra représenter les résultats dans un tableau.)

d. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X. Que représente E(X) pour l'entreprise ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté au repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(Unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

I. Résolution d'une équation différentielle

On note (E) l'équation différentielle :

$$y' + y = 3\text{e}^{-x} + x + 1$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 3x\text{e}^{-x} + x$, est une solution de l'équation différentielle.
3. On admet que toute solution f de l'équation (E) est de la forme $f(x) = u(x) + C\text{e}^{-x}$ où C est une constante réelle et u la fonction définie à la question 2.
   Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que : $f(0) = 2$.

II. Étude d'une fonction auxiliaire *g*

On note g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = \text{e}^{-x}(-3x + 1) + 1.$$

1. Calculer la dérivée g' de la fonction g.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variations (On ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.)
3. Calculer $g\left(\dfrac{4}{3}\right)$ et en déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

III. Étude de la fonction f déterminée en I.

On rappelle que f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(3x+2) + x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étude des limites.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Étude des variations de f.
   a. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = g(x)$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$. (On notera A leur point d'intersection.)
4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente $\mathscr{T}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
5. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$. Placer les points A et B puis tracer la courbe $\mathscr{C}$.

IV. Calcul d'une aire

1. Démontrer que la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$F(x) = -f(x) - 3\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} + x,$$

   est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, et l'axe des abscisses. (On donnera un résultat arrondi au mm^2.)